Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Adam Sikora

Metoda równania fali w badaniu eliptycznych i podeliptycznych operatorów różniczkowych drugiego rzędu

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
Prof. dr hab. Andrzeja Hulanickiego

Wrocław marzec 1994

1 Wstęp

W 1968 roku L.Hörmander udowodnił, że jeżeli pola wektorowe $X_0, ..., X_n$ na rozmaitości M spełniają następujący warunek:

Warunek Hörmandera, *Pola wektorowe*

$$X_0, ..., X_n$$

i ich komutatory (dowolnej długości) rozpinają przestrzeń styczną w każdym punkcie M*,*

wtedy operator

$$L = X_0 - X_1^2 - ... - X_n^2$$

jest hypoeliptyczny [16]. Badanie operatora L, tzn. np. szacowanie jądra rozwiązania podstawowego równania ciepła

$$\partial_t u(t, x) + Lu(t, x) = 0,$$

wymaga wprowadzenia metryki na M związenej z układem pól $X_0, ..., X_n$, nazywanej metryką podriemannowską.

Najlepiej zbadana jest sytuacja gdy rozmaitość M jest grupą Liego, a pola $X_0, ..., X_n$ są lewostronnie niezmiennicze [27]. Niniejsza praca poświęcona jest badaniu operatora L na pewnych grupach Liego, gdy pola $X_1, ..., X_n$ spełniają warunek Hörmandera lub operatora Laplace'a-Beltramiego na rozmaitościach riemannowskich.

Myślą przewodnią niniejszej pracy jest wykorzystanie faktu skończonej szybkości propagacji fali.

Skończona prędkość propagacji fali *Niech* $u(t, x)$ *spełnia równanie*

$$\partial_t^2 u(t, x) - Lu(t, x) = 0$$

z warunkiem początkowym $\operatorname{supp}\ u(0, \cdot) \cup \operatorname{supp}\ \partial_t u(0, \cdot) \subset B(r)$*. Wtedy* $\operatorname{supp}\ u(t, \cdot) \subset B(r + t)$*, gdzie* $B(r)$ *jest kulą o promieniu* r *dla odpowiednio dobranej metryki związanej z operatorem* L*.*

Jest to wynik klasyczny dla operatora Laplace'a-Beltramiego. Wykorzystując fakt, że metryka podriemannowska jest granicą metryk riemannowskich otrzymujemy ten wynik również dla operatorów spełniających warunek

Hörmadera na grupach (przy założeniu $X_0 = 0$). Pozwala to na wykorzystywanie klasycznego twierdzenia Paley-Wienara, co jest jednym z głównych narzędzi tej pracy.

W rozdziale 2 podsumowujemy dobrze znane fakty dotyczące metryk podriemannowskich dowodząc jednocześnie tych twierdzeń, z których będziemy korzystać. Zasadnicze znaczenie ma dla nas przedstawienie metryk podriemannowskich jako granicy metryk riemannowskich.

Związany z tym problem istnienia podaddytywnej, jednorodnej i gładkiej normy na grupach jednorodnych jest omawiany w rozdziale 3. Podamy tu dowód istnienia takich norm pochodzacy z pracy [11].

Rozdział 4 zawiera dowód własności skończonej prędkości propagacji fali dla operatora Laplace'a-Beltramiego na zupełnych rozmaitościach riemannowskich i dla lewostronnie niezmienniczych operatorów podeliptycznych na grupach Liego. Dowód ten opiera się na oszacowaniu "energii" dla równania fali i wzorowany jest na klasycznym dowodzie dla operatora Laplace'a na R^n. Dla operatorów podeliptycznych udowodnimy własność skończonej prędkości propagacji, korzystając z przejść granicznych. W tym punkcie istotne okażą się własności metryk podriemannowskich. Z twierdzeń dotyczących skończonej prędkości propagacji fali wyprowadzimy twierdzenia podobne do twierdzenia Paley-Wienera. Będą one służyły jako jako narzędzie do dowodu zwartości nośników jąder operatorów mnożnikowych dla badanch przez nas operatorów.

W rozdziale 5 udowodnimy punktowe oszacowania dla jąder ciepła związanych z rozpatrywanymi przez nas operatorami. Otrzymane rezultaty są wzmocnieniem wyników otrzymanch przez Devisa i Varopoulosa. W świetle pracy Molchanowa są to oszacowania niemal optymalne.

Idea wykorzystania własności skończonej prędkości propagacji fali do badania jądra ciepła pochodzi od Melrose. Jednak dzięki innemu sposobowi powiązania równania fali i równania ciepła jesteśmy w stanie otrzymać mocniejsze rezultaty. W drugiej części rozdziału 5 pokazujemy, że własność skończonej prędkości propagacji fali i oszacowania gausowskie dla jąder ciepła są równoważne. Zagadnienia rozpatrywane w tym rozdziale są tematem pracy [23].

Rozdział ostatni zawiera alternatywny dowód twierdzenia mnożnikowego M. Christa [1]. Pokazujemy jak wykorzystanie własności skończonej prędkości propagacji fali pozwala na otrzymanie bardzo prostego dowodu tego twierdzenia (patrz [22]).

Dziękuję mojemu promotorowi Andrzejowi Hulanickiemu za pomoc przy powstawaniu tej pracy. Dziękuję również Waldkowi Hebischowi i Jackowi Dziubańskiemu za cenne uwagi dotyczące omawianych tu zagadnień.

2 Metryka podriemannowska

Rozdział ten poświęcimy pojęciu metryki podriemannowskiej, nazywanej też metryką Carnota-Caratheorody'ego. Szerszą bibliografię i uwagi dotyczące historii tego pojęcia można znaleźć w [24]. Nasze rozważania ograniczymy tutaj tylko do grup Liego.

Niech G będzie spójną grupą Liego, a $\mathfrak{g}$ jej algebrą Liego. Elementy algebry $\mathfrak{g}$ bedziemy utożsamiać z lewoniezmienniczymi polami wektorowymi na grupie G. W dalszym ciągu tej pracy będziemy często korzystać z warunku Hörmandera, który w przypadku pól lewoniezmienniczych na grupie Liego ma następującą postać:

Definicja 2.1 *Lewoniezmiennicze pola wektorowe $X_1, \ldots, X_k$ spełniają warunek Hörmandera, jeżeli generują $\mathfrak{g}$ jako algebrę Liego.*

Następujący lemat podaje ważną własność pól spełniających warunek Hörmandera. Dowód tego lematu, który tu podamy, jest wzorowany na rozważaniach zawartych w rozdz. 3 [27].

Lemat 2.1 *Niech G będzie spójną grupą Liego i $X_1, \ldots, X_k$ rodziną pól wektorowych spełniających warunek Hörmandera. Wtedy każde dwa punkty $x, y \in G$ można połączyć krzywą $\gamma : [a, b] \mapsto G$, kawałkami gładką taka, że dla wszystkich $a \le t \le b$, dla których wektor $\dot\gamma(t)$ styczny do krzywej γ w punkcie t istnieje, $\dot\gamma(t) \in \mathrm{lin}\{X_1, \ldots, X_k\}$. Krzywą spełniającą powyższe warunki będziemy nazywać kawałkami gładką krzywą dopuszczalną.*

Aby pokazać lemat 2.1 udowodnimy najpierw

Lemat 2.2 *Niech $\exp : \mathfrak{g} \mapsto G$ będzie odwzorowaniem wykładniczym. Określmy odwzorowanie $c_i : I\!\!R \mapsto G$ indukcyjnie, wzorem*

$$c_1(t) = \exp(tX_1), \tag{1}$$
$$c_i(t) = \exp(tX_i)c_{i-1}(t)\exp(-tX_i)c_{i-1}(t)^{-1},$$

gdzie $X_1, \ldots, X_i$ są elementami algebry $\mathfrak{g}$. Wtedy dla $f \in C^\infty(G)$ i $g \in G$

$$f(gc_i(t)) = f(g) + t^i([X_i, [X_{i-1}, \ldots, X_1] \ldots]f)(g) + O(t^{i+1}),$$

gdzie $[X, Y]$ jest nawiasem Liego pól X i Y.

Dowód rozbijemy na dwa kroki.

Krok 1. Niech Q będzie łączną algebrą z jednością i $\hat{Q}$ algebrą formalnych szeregów potęgowych zmiennej t o współczynnikach z Q. Dla $z \in Q$ określmy $e^{tz} \in \hat{Q}$ wzorem

$$e^{tz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k z^k}{k!}.$$

Podobnie jak we wzorze (1) określmy $\tilde{c}_i \in \hat{Q}$ indukcyjnie, formułą

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1(t) &= e^{tx_1}, \\ \tilde{c}_i(t) &= e^{tx_i}\tilde{c}_{i-1}(t)e^{-tx_i}\tilde{c}_{i-1}(t)^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie x_i są elementami algebry Q. Wtedy

$$\tilde{c}_i(t) = 1 + t^i[x_i, [x_{i-1}, \ldots, x_1] \ldots] + O(t^{i+1}). \tag{2}$$

Równość (2) rozumiemy tutaj w tym sensie, że w zapisie $\tilde{c}_i$ poza członem $1 + t^i[x_i[x_{i-1} \ldots x_1] \ldots]$ występują tylko wyrażenia pomnożone przez t w potędze większej od i.

Rzeczywiście dla $i = 1$ równość (2) jest oczywista, a następujący ciąg tożsamości pokazuje poprawność kroku indukcyjnego

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{i+1}(t) &= e^{tx_{i+1}}\tilde{c}_i(t)e^{-tx_{i+1}}\tilde{c}_i(t)^{-1} \\ &= e^{tx_{i+1}}(\tilde{c}_i(t) - 1)e^{-tx_{i+1}}\tilde{c}_i(t)^{-1} + \tilde{c}_i(t)^{-1} \\ &= (1 + tx_{i+1})(\tilde{c}_i(t) - 1)(1 - tx_{i+1})\tilde{c}_i(t)^{-1} + \tilde{c}_i(t)^{-1} + O(t^{i+2}) \\ &= (\tilde{c}_i(t) - 1)\tilde{c}_i(t)^{-1} + t^{i+1}[x_{i+1}, [x_i, \ldots, x_1] \ldots] + \tilde{c}_i(t)^{-1} + O(t^{i+2}) \\ &= 1 + t^{i+1}[x_{i+1}, [x_i, \ldots, x_1] \ldots] + O(t^{i+2}). \end{aligned}$$

Krok 2. Załóżmy teraz, że $f \in C^\infty(G)$ i dla $X \in \mathfrak{g}$ połóżmy $F(t) = f(g\exp(tX))$. Wtedy

$$\frac{d^n}{dt^n}F(t) = X^n f(g\exp(tX))$$

Szereg Taylora funkcji F ma więc w punkcie $t = 0$ postać

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}(X^i f)(g),$$

co będziemy zapisywać jako $(e^{tX} f)(g)$. Następnie wybierzemy $Z_1, \ldots, Z_s \in \mathfrak{g}$ i zdefiniujemy funkcję H wzorem

$$H(t_1, \ldots, t_s) = f(g \exp(t_1 Z_1) \ldots \exp(t_s Z_s))$$

Zauważmy, że

$$\frac{\partial^{m_s}}{\partial t_s^{m_s}} H(t_1, \ldots, t_{s-1}, 0) = Z_s^{m_s} f(g\exp(t_1 Z_1) \ldots \exp(t_{s-1} Z_{s-1}))$$

Iterując otrzymujemy

$$\frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_s}}{\partial t_1^{m_1} \ldots \partial t_s^{m_s}} H(0, \ldots, 0) = Z_1^{m_1} \ldots Z_s^{m_s} f(g).$$

Możemy więc szereg Taylora funkcji H w punkcie $(0, \ldots, 0)$ zapisać jako

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_s=0}^{\infty} \frac{t_1^{i_1} \ldots t_s^{i_s}}{i_1! \ldots i_s!} Z_1^{m_1} \ldots Z_s^{m_s} f(g). \tag{3}$$

Wzór (3) możemy traktować jako element algebry formalnych szeregów potęgowych nad algebrą obwiednią algebry $\mathfrak{g}$, postaci

$$e^{t_1 Z_1} \ldots e^{t_s Z_s} f(g).$$

Jeśli teraz użyjemy wzoru (3) do obliczenia szeregu Taylora funkcji $K(t) = f(gc_i(t))$ i następnie skorzystamy z równości (2) udowodnionej w kroku 1, to z postaci szeregu Taylora dla funkcji K wynika, że

$$K(t) = f(g) + t^i([X_i, [X_{i-1}, \ldots, X_1] \ldots] f)(g) + O(t^{i+1}),$$

co dowodzi lematu 2.2.

Dowód lematu 2.1. Wybierzmy bazę $Y_1, \ldots, Y_n$ przestrzeni $\mathfrak{g}$ taką, że

$$Y_i = [V_{k_i,i}, [V_{k_i-1,i}, \ldots, V_{1,i}] \ldots],$$

gdzie $V_{l,s} \in \mathrm{lin}\{X_1, \ldots, X_k\}$. Istnienie takiej bazy gwarantują nam założenia lematu 2.1. Zdefiniujmy funkcję $\phi_i : I\!R \mapsto G$ wzorem (1) po podstawieniu za wektory X_s wektorów $V_{s,i}$. Niech $\psi : I\!R^n \mapsto G$ będzie określone wzorem

$$\psi(t_1, \ldots, t_n) = g \cdot \phi_1(t_1^{1/k_1}) \cdot \ldots \cdot \phi_n(t_n^{1/k_n}).$$

Z lematu 2.2 wynika, że ψ jest klasy C^1 i

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\psi(0, \ldots, 0) = Y_i.$$

Na mocy twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym wynika stąd, że obraz ψ zawiera pewne otwarte otoczenie punktu g. Łatwo jednak zauważyć, że wszystkie punkty z obrazu ψ można połączyć z g krzywą dopuszczalną. Z drugiej strony istnienie takiej krzywej łączącej punkty $p, q \in G$ wprowadza na G relację równoważności, która rozbija G na klasy abstrakcji. Własności odwzorowania ψ pokazują, że te klasy abstrakcji są zbiorami otwartymi. Na mocy założenia spójności cała grupa musi więc należeć do jednej klasy abstrakcji, co dowodzi lematu 2.1.

Ze względów technicznych wprowadźmy klasę dopuszczalnych krzywych Lipschitza. Odwzorowanie $\gamma : [a, b] \mapsto G$ bedziemy nazywać krzywą Lipschitza jeżeli istnieje taka stała C, że $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \leq C\|t - s\|$, gdzie odległość $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|$ jest liczona we współrzędnych lokalnych. Jeżeli γ spełnia powyższy warunek, to jej pochodna $\dot{\gamma}(t)$ istnieje prawie wszędzie i $\dot{\gamma}(t) \in L^\infty$. Odwzorowanie γ bedziemy nazywać dopuszczalną krzywą Lipschitza jeżeli jest ona krzywą Lipschitza i ponadto $\dot{\gamma}(t) \in \mathrm{lin}\{X_1, \ldots, X_k\}$, dla prawie wszystkich $t \in [a.b]$.

Załóżmy teraz, że pola $X_1, \ldots, X_k$ spełniają warunek Hörmandera i wprowadźmy na przestrzeni $\mathrm{lin}\{X_1, \ldots, X_k\}$ iloczyn skalarny $< \, , \, >$.

Definicja 2.2 *Odległość podriemannowską punktów $p, q \in G$ (odpowiadającą iloczynowi $< \, , \, >$) określmy wzorem*

$$\rho(p, q) = \inf \int_a^b < \dot{\gamma}, \dot{\gamma} >^{1/2} \, dt,$$

gdzie infimum jest brane po wszystkich dopuszczalnych krzywych Lipschitza takich, że $\gamma(a) = p$ i $\gamma(b) = q$.

Z lematu 2.1 wynika, że

Lemat 2.3 *Definicja 2.2 definiuje na G metrykę zgodną z topologią G.*

Lemat 2.4, który udowodnimy poniżej pokazuje jak można otrzymać metrykę określoną w definicji 2.2 jako granicę metryk riemannowskich. Niech $Y_1, \dots, Y_k$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $\mathrm{lin}\{X_1, \dots, X_k\}$ z iloczynem skalarnym $< , >$. Wybierzmy wektory $Z_1, \dots, Z_l$ tak by wraz z wektorami $Y_1, \dots, Y_k$ stanowiły bazę przestrzeni $\mathfrak{g}$ i określmy na $\mathfrak{g}$ iloczyn skalarny $< , >_\epsilon$ tak by wektory $Y_1, \dots, Y_k$ i $\epsilon Z_1, \dots, \epsilon Z_k$ były bazą ortonormalną przestrzeni $\mathfrak{g}$ z iloczynem $< , >_\epsilon$. Zdefiniujmy dalej ρ_ϵ jako lewoniezmienniczą metrykę Riemanna odpowiadającą iloczynowi $< , >_\epsilon$. Wtedy

Lemat 2.4 *Jeżeli ρ jest metryką podriemanowską określoną w definicji 2.2 dla iloczynu $< , >$, to dla wszystkich punktów $p, q \in G$*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \rho_\epsilon(p,q) = \rho(p,q) \tag{4}$$

Dowód. Z definicji iloczynu skalarnego $< , >_\epsilon$ wynika, że jeżeli $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$, to dla każdego $X \in \mathfrak{g}$

$$< X, X >_{\epsilon_1} \leq < X, X >_{\epsilon_2} . \tag{5}$$

Ponadto jeżeli $X \in \mathrm{lin}\{X_1, \dots, X_k\}$, to

$$< X, X >_\epsilon = < X, X > . \tag{6}$$

Na mocy lematu 2.1 dla wszystkich punktów p, q istnieje dopuszczalna krzywa Lipschitza łącząca te punkty i z (6) wynika, że ma ona w metryce odpowiadającej iloczynowi $< , >_\epsilon$ tę samą długość co w metryce zdefiniowanej w 2.2 dla $< , >$. Ponieważ jednak w metryce riemannowskiej odległość jest liczona jako infimum po wiekszej rodzinie krzywych, to

$$\rho_\epsilon(p,q) \leq \rho(p,q) < \infty. \tag{7}$$

Zauważmy ponadto, że na mocy (5) $\rho_\epsilon(p,q)$ jest nierosnącą funkcją ϵ i dlatego granica (4) istnieje. Połóżmy

$$\bar{\rho}(p,q) = \lim_{\epsilon \to 0} \rho_\epsilon(p,q)$$

Niech krzywa $\gamma_\epsilon : \ [0,1] \mapsto G$, $\epsilon > 0$ będzie geodezyjną realizującą minimum odległości miedzy punktami p i q w metryce wyznaczonej przez iloczyn skalarny $< \ , \ >_\epsilon$. Z własności geodezyjnych wynika, że

$$< \dot{\gamma}_\epsilon(t), \dot{\gamma}_\epsilon(t) >_\epsilon = \rho_\epsilon(p,q)^2, \tag{8}$$

dla $t \in [0,1]$. Na mocy (5), (7) i (8) mamy

$$< \dot{\gamma}_\epsilon(t), \dot{\gamma}_\epsilon(t) >_1 \leq \rho(p,q)^2 \quad \text{dla} \quad \epsilon \leq 1.$$

Stąd na mocy twierdzenia Arzeli-Ascoliego wynika, że możemy wybrać taki ciąg $\epsilon_n \searrow 0$ by krzywe γ_{ϵ_n} były zbieżne jednostajnie do pewnej ciągłej krzywej γ. Zauważmy, że ponieważ $\rho_\epsilon(p,q)$ jest nierosnącą funkcją ϵ, to

$$\begin{gathered}\rho_\epsilon(\gamma(t),\gamma(s)) = \lim_{n\to\infty} \rho_\epsilon(\gamma_{\epsilon_n}(t), \gamma_{\epsilon_n}(s)) \\ \leq \sup_n \rho_{\epsilon_n}(\gamma_{\epsilon_n}(t), \gamma_{\epsilon_n}(s)) = \bar{\rho}(p,q)|t-s|\end{gathered}$$

dla $\epsilon > 0$. Wynika stąd, że γ jest krzywą Lipschitza, więc $\dot{\gamma}$ istnieje prawie wszędzie i

$$< \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) >_\epsilon \leq \bar{\rho}(p,q)^2 < \infty. \tag{9}$$

Łatwo jednak zauważyć, że jesli $X \notin \mathrm{lin}\{X_1, \ldots, X_k\}$, to

$$\lim_{\epsilon \to 0} < X, X >_\epsilon = \infty.$$

Stąd $\dot{\gamma}(t) \in \mathrm{lin}\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{k}.\}$ dla prawie wszystkich t i z (6) i (9) mamy

$$\int_0^1 < \dot{\gamma}, \dot{\gamma}(t) >^{1/2} = \int_0^1 < \dot{\gamma}, \dot{\gamma}(t) >_\epsilon^{1/2} \leq \bar{\rho}(p,q),$$

co wspólnie z (7) dowodzi lematu 2.4.

3 Gładka podaddytywna norma jednorodna na grupie jednorodnej.

Definicja 3.1 *Niech G będzie spójną i jednospójną grupą Liego. Jednoparametrową rodzinę automorfizmów grupy G $\{\delta_t\}_{t>0}$ ($\delta_t \circ \delta_s = \delta_{ts}$) nazwiemy* *rodziną dylatacji, jeżeli pochodne $d_e\delta_t : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ odwzorowań δ_t w elemencie neutralnym e grupy G wyrażają się wzorem*

$$d_e\delta_t\, e_j = t^{d_j} e_j,$$

gdzie $e_1, \ldots, e_n$ jest pewną bazą liniową $\mathfrak{g}$ a d_j są liczbami rzeczywistymi takimi, że $d_n \geq \ldots \geq d_1 \geq 1$. Jeżeli na grupie G istnieje taka rodzina dylatacji, to G będziemy nazywać grupą jednorodną. Liczbę Q określoną jako

$$Q = \sum d_i \tag{10}$$

będziemy nazywać wymiarem jednorodnym grupy G.

Każda grupa jednorodna jest nilpotentna, a odwzorowanie wykładnicze jest dyfeomorfizmem z algebry Liego tej grupy na samą grupę ([8] Proposition (1.2) i (1.3)). W dalszym ciągu tego rozdziału będziemy utożsamiać grupę G z jej algerą Liego $\mathfrak{g}$ poprzez odwzorowane wykładnicze. Przy tym utożsamieniu odwzorowanie $d_e\delta_t$ jest tożsame z odwzorowaniem δ_t.

Celem tego rozdziału jest udowodnienie, że na każdej grupie jednorodnej istnieje gładka podaddytywna norma jednorodna.

Definicja 3.2 *Funkcję $\|\cdot\| : G \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ będziemy nazywać gładką podaddytywną normą jednorodną, jeżeli spełnia ona nastęujące warunki*

(a) $\|xy\| \leq \|x\| + \|y\|$,	*(b)* $\|\delta_t x\| = t\|x\|$,
(c) $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = e$,	*(d)* $\|x\| = \|x^{-1}\|$,
(e) $\|\cdot\|$ *jest ciągła,*	*(f)* $\|\cdot\|$ *jest gładka na* $G - \{e\}$.

Dowód istnienia gładkiej normy jednorodnej na grupie jednorodnej zaczniemy od dowodu następującego lematu

Lemat 3.1 *Istnienie normy $\|\cdot\|$ spełniającej warunki (a)-(e) jest równoważne istnieniu zbioru $A \in G$ spełniającego następujące warunki:*

(α) A jest otwarty i $\bar{A}$ jest zwarty,
(β) A jest wypukły tzn. jeżeli $x, y \in A$ i $0 \leq t \leq 1$, to $\delta_t x \cdot \delta_{1-t} y \in A$,
(γ) A jest symetryczny to znaczy jeżeli $x \in A$, to $x^{-1} \in A$.

Ponadto, jeżeli

(ϵ) (i) brzeg ∂A zbioru A jest gładką rozmaitością,
(ii) $(d/dt)\delta_t x|_{t=1} \notin T_x(\partial A)$ dla wszystkich $x \in \partial A$,

to normę $\|\cdot\|$ można określić tak by spełniała ona również warunek (f).

Dowód. Niech A będzie zbiorem spełniającym warunki (α)-(γ). Zdefiniujmy normę $\|\cdot\|$ wzorem

$$\|x\| = \inf\{t: \ \delta_{1/t}x \in A\}. \tag{11}$$

Wtedy, jeżeli $\|x\| < \epsilon$ i $\|y\| < \epsilon'$, to $\delta_{1/\epsilon}x \in A$ i $\delta_{1/\epsilon'}x \in A$ i na mocy (β)

$$\delta_{1/(\epsilon+\epsilon')}xy = \delta_{\epsilon/(\epsilon+\epsilon')}\delta_{1/\epsilon}x \cdot \delta_{\epsilon'/(\epsilon+\epsilon')}\delta_{1/\epsilon'}y \in A,$$

czyli $\|xy\| < \epsilon + \epsilon'$, co dowodzi warunku (a). Sprawdzenie pozostałych warunków jest łatwe. Implikację odwrotną otrzymamy kładąc

$$A = \{x: \ \|x\| < 1\}.$$

Zauważmy, że jeżeli norma $\|\cdot\|$ jest zdefiniowana wzorem (11), to warunki (ϵ) i (f) są równoważne.

Twierdzenie 3.1 *Dla każdej grupy jednorodnej G istnieje zbiór A spełniający warunki (α)-(ϵ), a więc na G istnieje również norma spełniająca warunki (a)-(f).*

Dowód. Jeżeli G jest abelowa, to

$$A = \{x = (x_1, \dots, x_n): \ \sum_1^n x_i^2 < 1\}.$$

Aby pokazać, że A spełnia warunek (β) zauważmy, że $d_i \geq 1$, więc

$$\begin{aligned}(\sum(t^{d_i}x_i + (1-t)^{d_i}y_i)^2)^{1/2} &\leq (\sum(t^{d_i}x_i)^2)^{1/2} + (\sum((1-t)^{d_i}y_i)^2)^{1/2} \\ &\leq t(\sum x_i^2)^{1/2} + (1-t)(\sum y_i^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Warunki (α),(γ) i (ϵ) są spełnione w sposób oczywisty.

Zauważmy teraz, że jeżeli G nie jest grupą abelową, to $d_n \geq 2$ i e_n jest w centrum G, bo

$$\delta_t([e_i, e_j]) = [\delta_t e_i, \delta_t e_j] = t^{d_i+d_j}[e_i, e_j], \tag{12}$$

a założyliśmy, że $1 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n$. Na mocy wzoru Campbella-Hausdorffa mamy

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1 + P_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1}), \\ \ldots, x_n + y_n + P_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, \ldots, y_{n-1})),$$

gdzie P_i są wielomianami i ponadto ponieważ e_n jest w centrum G, to P_i nie zależy ani od x_n ani od y_n.

Dowód będziemy kontynuować indukcyjnie ze względu na wymiar grupy dim G. Niech A' będzie podzbiorem grupy ilorazowej

$$G' = G/\mathrm{lin}\{e_n\} = \{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1} : x_i \in I\!R\}$$

spełniającym warunki (α)-(ϵ) i $\| \cdot \|'$ odpowiadającą mu normą. Zauważmy teraz , że istnieje taka stała C, że

(13) $|P_n(\delta_t x, \delta_{1-t} y)| \leq 2Ct(1-t)$ dla wszystkich $x, y \in A', 0 \leq t \leq 1.$

Rzeczywiście, ponieważ $P_n(x, 0) = P_n(0, y) = 0$, widzimy, że każdy jednomian w P_n zależy jednocześnie od x i y, więc ponieważ zbiór A' jest ograniczony, to dla pewnej stałej C nierówność (13) zachodzi. Dalej dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, połóżmy $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Pokażemy teraz, że jeżeli C jest stałą z nierówności (13), a f jest taką funkcją, że $f \in C^\infty(0,1)$, $f' \leq 0$, $f'' \leq 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f^{(k)}(0) = 0$, $f^{(k)}(1) = -\infty$ dla $k = 1, 2, \ldots$, to zbiór

$$A = \{x \in G : \bar{x} \in A' \text{ i } |x| < C + f(\|\bar{x}\|')\}$$

również spełnia warunki (α)-(ϵ).

Uwaga. Jeżeli założymy, że $f = 0$, to powyższa konstrukcja daje zbiór spełniający warunki (α)-(γ) nie spełniający jednak warunku (ϵ).

Dowód warunków (α)-(ϵ) dla A. Warunki (α) i (γ) są spełnione w sposób oczywisty. Aby pokazać warunek (β) zauważmy, że jeśli $x, y \in A$, to

$$\overline{\delta_t x \cdot \delta_{1-t} y} = \delta_t \bar{x} \cdot \delta_{1-t} \bar{y} \in A'.$$

Dlatego wystarczy, jeżeli pokażemy następującą nierówność

$$|t^{d_n} x_n + (1-t)^{d_n} y_n + P_n(\delta_t \bar{x}, \delta_{1-t} y)| < C + f(\|\delta_t \bar{x} \cdot \delta_{1-t} \bar{y}\|').$$

Ale $d_n \geq 2, 0 \leq t \leq 1, f' \leq 0, f'' \leq 0$. Stąd, ponieważ na mocy założenia indukcyjnego norma $\|\cdot\|'$ spełnia warunki (a) i (b), to

$$\begin{aligned} &|t^{d_n} x_n + (1-t)^{d_n} y_n + P_n(\delta_t \bar{x}, \delta_{1-t}\bar{y})| \\ &< t^2(C + f(\|\bar{x}\|')) + (1-t)^2(C + f(\|\bar{y}\|')) + 2Ct(1-t) \\ &\leq C(t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2) + tf(\|\bar{x}\|') + (1-t)f(\|\bar{y}\|') \\ &\leq C + f(t\|\bar{x}\|' + (1-t)\|\bar{y}\|') \leq C + f(\|\delta_t\bar{x} \cdot \delta_{1-t}\bar{y}\|'). \end{aligned}$$

Warunek(ϵ)(i) jest oczywisty. Warunek (ϵ)(ii) udowodnimy najpierw dla takich $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \partial A$, że $|x_n| < C$. Wtedy $\bar{x} \in \partial A'$ i $\overline{T_x(\partial A)} = T_{\bar{x}}(\partial A') \oplus I\!Re_n$. Dlatego, jeżeli $(d/dt)\delta_t x|_{t=1} \in T_x(\partial A)$, to $\overline{(d/dt)\delta_t x|_{t=1}} \in T_{\bar{x}}(\partial A')$. Ale to jest sprzeczne z założeniem indukcyjnym. Zauważmy teraz, że zbiór $\partial A \cap \{x \in I\!R^n : x_n > C\}$ jest wykresem funkcji $g(\bar{x}) = f(\|\bar{x}\|')$ $g : A' \mapsto I\!R$ i że jeżeli wektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in T_{\bar{x}, g(\bar{x})}M$, gdzie M jest wykresem funkcji g, to $v_n = (d/dt)g(\bar{x} + t\bar{v}) = (\bar{v}g)(\bar{x})$. Dlatego, jeżeli $(d/dt)\delta_t x|_{t=1} \in T_x(\partial A)$, gdzie $x = (\bar{x}, C + f(\|\bar{x}\|'))$, to na mocy definicji funkcji f $(f' \leq 0)$,

$$\begin{aligned} &0 < d_n x_n = ((d/dt)\delta_t\bar{x}|_{t=1})(C + f(\|\bar{x}\|')) \\ &= (d/dt)f(\|\delta_t\bar{x}\|')|_{t=1} = (d/dt)f(t\|\bar{x}\|')|_{t=1} = f'(\|\bar{x}\|')\|\bar{x}\|' \leq 0. \end{aligned}$$

Powyższa sprzeczność dowodzi warunku (ϵ)(ii) dla $\partial A \cap \{x \in I\!R^n : x_n > C\}$. Warunek (ϵ)(ii) dla zbioru $\partial A \cap \{x \in I\!R^n : x_n < -C\}$ wynika z symetrii.

Twierdzenie 3.2, które sformułujemy poniżej pokazuje przykład bardzo prostego zbioru wypukłego, to znaczy zbioru spełniającego warunki (α)-(ϵ). Sprawdzenie tych warunków jest jednak trudniejsze niż w twierdzeniu 3.1.

Twierdzenie 3.2 *Niech G będzie grupą jednorodną i $x = (x_1, \ldots, x_n)$ jednorodnymi współrzędnymi $(\delta_t x = (t_{d_1}x_1, \ldots, t_{d_n}x_n))$. Istnieje takie $\epsilon > 0$, że dla wszystkich $r < \epsilon$ zbiór*

$$A = \{x : \sum x_i^2 < r^2\}$$

spełnia warunki (α)-(ϵ). W rezultacie istnieje taka podaddytwna norma jednorodna na G

$$\|x\|' = \inf\{t : \|\delta_{1/t}x\| < r\},$$

że kula jednostkowa dla tej normy $\{x : \|x\|' < 1\}$ pokrywa się z kulą w metryce euklidesowej $\{x : \|x\| < r\}$ $(\|x\|^2 = \sum x_i^2)$.

Dowód. Sprawdzimy tylko warunek (β) ponieważ pozostałe warunki są oczywiste. Określmy

$$V_1 = \mathrm{lin}\{e_i : d_i < 2\}, \quad V_2 = \mathrm{lin}\{e_i : d_i \geq 2\}.$$

Wtedy jako przestrzeń liniowa $G = V_1 \oplus V_2$. Ponieważ $d_k \geq 1$, to z (12) wynika, że $[x, y] \in V_2$ dla wszystkich $x, y \in G$. Dlatego, jeżeli $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$, to

$$x \cdot y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + R(x, y)).$$

Połóżmy $R_1(x, y) = R((x_1, 0), (y_1, 0))$ i $R_2 = R - R_1$. Ze wzoru Campbella-Hausdorffa wynika, że istnieje taka stała C_1', że jeżeli $\|x\|, \|y\| < 1$, to

$$\|R_1(x, y)\| \leq C_1' \|[x_1, y_1]\|.$$

Dlatego, na mocy nierówności

$$\|[x, y]\| \leq C_1'' \|x\| \|y\| \|x/\|x\| - y/\|y\|\|,$$

która jest prostą konsekwencją dwuliniowości i antysymetrii nawiasu Liego $[\ ,\ ]$, dla pewnej stałej C_1 mamy,

$$\|R_1(x, y)\| \leq C_1 \|x_1\| \|y_1\| \|x_1/\|x_1\| - y_1/\|y_1\|\|, \tag{14}$$

dla wszystkich $\|x\|, \|y\| < 1$. Również ze wzoru Campbella-Hausdorffa wynika, że istnieje taka stała C', że dla wszystkich $\|x\|, \|y\| < 1$

$$\|R_2(x, y)\| \leq C'(\|x_1\| \|y_2\| + \|x_2\| \|y_1\| + \|x_2\| \|y_2\|). \tag{15}$$

Następnie połóżmy

$$v = \delta_t x_2 + \delta_{1-t} y_2 + R_2(\delta_t x, \delta_{1-t} y).$$

Na mocy definicji $d_i \geq 2$ dla $e_i \in V_2$, dlatego z (15) wynika, że

$$\|v\| \leq t^2 \|x_2\| + (1-t)^2 \|y_2\| + C' t(1-t)(\|x_1\| \|y_2\| + \|x_2\| \|y_1\| + \|x_2\| \|y_2\|).$$

Jeżeli poza tym założymy, że $C'(\|x_1\| + \|x_2\| + \|y_2\|) \leq 1/2$ i $0 \leq t \leq 1$, to

$$\|v\| \leq t^2 \|x_2\| + (1-t)^2 \|y_2\| + \frac{1}{2} t(1-t)(\|x_2\| + \|y_2\|) \leq \|x_2\| + \|y_2\|$$

i ponadto

$$\|v\| \le t^2\|x_2\| + (1-t)^2\|y_2\| + \frac{1}{2}t(1-t)(\|x_2\|+\|y_2\|)$$
$$= t\|x_2\| + (1-t)\|y_2\| - \frac{1}{2}t(1-t)(\|x_2\|+\|y_2\|).$$

Dlatego

$$\|v\| + \frac{1}{2}t(1-t)(\|x_2\|+\|y_2\|) \le t\|x_2\| + (1-t)\|y_2\|$$

i

$$\|v\|^2(1+t(1-t)) \le \|v\|^2 + t(1-t)\|v\|(\|x_2\|+\|y_2\|) \tag{16}$$
$$\le (\|v\| + \frac{1}{2}t(1-t)(\|x_2\|+\|y_2\|))^2 \le (t\|x_2\| + (1-t)\|y_2\|)^2.$$

Z drugiej strony jeżeli $(x,y) = \sum x_i y_i$ jest iloczynem skalarnym, to

$$2(v_1, v_2) \le t(1-t)\|v_1\|^2 + 4\|v_2\|^2/(t(1-t)).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \|v + R_1(\delta_t x, \delta_{1-t} y)\|^2 \le{}& \|v\|^2(1+t(1-t)) \\ &+\|R_1\|^2[1+4/(t(1-t))]. \end{aligned} \tag{17}$$

Zauważmy ponadto, że

$$(\|x\|+\|y\|)^2 = \|x+y\|^2 + \|x\|\|y\|\|x/\|x\| - y/\|y\|\|^2. \tag{18}$$

Ostatecznie z (14),(16),(17) i (18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\delta_t x \cdot \delta_{1-t} y\|^2 &= \|\delta_t x_1 + \delta_{1-t} y_1\|^2 + \|v + R_1(\delta_t x, \delta_{1-t} y)\|^2 \\ &\le (\|\delta_t x_1\| + \|\delta_{1-t} y_1\|)^2 - \|\delta_t x_1\|\|\delta_{1-t} y_1\| \\ &\quad \times \|\delta_t x_1/\|\delta_t x_1\| - \delta_{1-t} y_1/\|\delta_{1-t} y_1\|\|^2 \\ &\quad + \|v\|^2(1+t(1-t)) + \|R_1\|^2[1+4/(t(1-t))] \\ &\le (t\|x_1\| + (1-t)\|y_1\|)^2 + (t\|x_2\| + (1-t)\|y_2\|)^2 \\ &\quad + [1+4/(t(1-t))]C_1^2 t(1-t)\|x_1\|\|y_1\|\|\delta_t x_1\|\|\delta_{1-t} y_1\| \\ &\quad \times \|\delta_t x_1/\|\delta_t x_1\| - \delta_{1-t} y_1/\|\delta_{1-t} y_1\|\|^2 \\ &\quad - \|\delta_t x_1\|\|\delta_{1-t} y_1\|\|\delta_t x_1/\|\delta_t x_1\| - \delta_{1-t} y_1/\|\delta_{1-t} y_1\|\|^2. \end{aligned}$$

Jednak, jeżeli $5C_1^2\|x_1\|\|y_1\| < 1$ to suma ostatnich dwóch wyrażeń jest niedodatnia i

$$\begin{aligned}\|\delta_t x \cdot \delta_{1-t} y\|^2 &\leq (t\|x_1\| + (1-t)\|y_1\|)^2 + (t\|x_2\| + (1-t)\|y_2\|)^2 \\ &\leq (t\|x\| + (1-t)\|y\|)^2\end{aligned}$$

Nierówność ta dowodzi twierdzenia 3.2.

Uwaga. Ważną podklasą algebr jednorodnych są algebry stratyfikowane.

Definicja 3.3 *Powiemy, że algebra* $\mathfrak{g}$ *jest algebrą stratyfikowaną, jeżeli istnieje taka rodzina podprzestrzeni liniowych* $\mathfrak{g}_i$ *algebry* $\mathfrak{g}$*, że*

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{l} \mathfrak{g}_i,$$

gdzie $\oplus$ *jest sumą prostą przestrzeni liniowych,*

$$[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \tag{19}$$

i ponadto $\mathfrak{g}_1$ *generuje* $\mathfrak{g}$ *jako algebrę Liego.*

Na każdej algebrze stratyfikowanej możemy zdefiniować rodzinę dylatacji wzorem

$$\delta_t x = t^i x,$$

dla $x \in \mathfrak{g}_i$. Odpowiadająca algebrze $\mathfrak{g}$ jednospójna grupa G jest wtedy grupą jednorodną. Jeżeli algebra $\mathfrak{g}$ jednorodnej grupy Liego G jest stratyfikowana to możemy uzyskać podaddtywną normę jednorodną na G wprowadzając na podprzestrzeni $\mathfrak{g}_1$ iloczyn skalarny i rozpatrując odpowiadającą mu metrykę podriemannowską $\rho(\cdot,\cdot)$ określoną w definicji 2.2. Nietrudno zauważyć, że funkcja $|g| = \rho(e, g)$ spełnia warunki (a)-(e) z definicji 3.2. Jednak nie wszystkie grupy jednorodne sa grupami stratyfikowanymi i nawet w przypadku grup stratyfikowanych otrzymana w ten sposób norma jednorodna zazwyczaj nie jest gładka.

4 Skończona prędkość propagacji rozwiązań równania fali.

Niech M będzie spójną i zupełną rozmaitością riemannowską, a dx gładką, dodatnią, nigdzie nie znikającą miarą określoną na M. Przez $B(r, x)$ będziemy oznaczać kulę o środku w punkcie x i promieniu r. Zdefiniujmy operator

$\mathfrak{L}$ wzorem

(20) $$\mathfrak{L}f = -div\ grad\ f,$$

gdzie *div* jest dywergencją względem miary dx (patrz [10] wzór (7.6) str. 370). Następnie przez L będziemy oznaczać rozszerzenie Friedrichsa operatora $\mathfrak{L}$ (patrz [4] Theorem 1.2.8 str. 10). Operator L jako rozszerzenie Fridriechsa symetrycznego i dodatnio określonego operatora $\mathfrak{L}$ jest samosprzężony na $L^2(dx)$. Dla ograniczonej funkcji borelowskiej $F : [0, \infty) \mapsto \mathbb{C}$ możemy zdefiniować operator $F(L) : L^2(dx) \to L^2(dx)$ wzorem

(21) $$F(L) = \int_0^\infty F(\lambda)\, dE(\lambda),$$

gdzie $E(\lambda)$ jest rozkładem spektralnym operatora L. Z twierdzenia Schwartza o jądrach operatorów ([15] Theorem 5.2.3 str. 128) wynika, że istnieje jądro operatora $F(L)$, to znaczy taka dystrybucja $K_{F(L)}(x, y)$, że

(22) $$F(L)(\phi)(x) = \int_M \phi(y) K_{F(L)}(x, y)\, dy,$$

dla funkcji $\phi \in C_c^\infty(M)$. Niech

(23) $$C_t(\lambda) = \cos(t\lambda),$$
$$S_t(\lambda) = \frac{\sin(t\lambda)}{\lambda}.$$

Własność skończonej prędkości propagacji rozwiązań równania fali możemy sformułować w postaci następującego twierdzenia

Twierdzenie 4.1 *Jeżeli $\rho(\cdot, \cdot)$ jest odległością riemannowską na rozmaitości M odpowiadającą operatorowi L, to*

(24) $$\text{supp } K_{C_t(\sqrt{L})} \subset \{(x, y) \in M^2 : \rho(x, y) \le t\},$$

(25) $$\text{supp } K_{S_t(\sqrt{L})} \subset \{(x, y) \in M^2 : \rho(x, y) \le t\}.$$

Uwaga 1. Inny dowód twierdzenia 4.3 można znaleźć na przykład w [25] rozdz. IV. Dowód prezentowany przez nas poniżej jest uogólnieniem dowodu skończonej prędkości propagacji rozwiązań równania fali dla klasycznego laplasjanu na przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z [7].

2. Korzystając z twierdzenia 4.2, które udowodnimy poniżej, można pokazać, że wzór (25) wynika z (24), umieszczamy go jednak w tezie twierdzenia 4.1 ze względu na potrzeby dowodu.

W naszym dowodzie twierdzenia 4.1 kluczowy będzie następujący lemat

Lemat 4.1 *Załóżmy, że funkcja $\Phi \in C^\infty(M \times I\!R)$ spełnia równanie fali, to znaczy*

$$\partial_t^2 \Phi(x,t) = -\mathfrak{L}\Phi(x,t). \tag{26}$$

Wtedy dla każdego $y \in M$ istnieje taka liczba $c_y > 0$, że funkcja

$$P(t) = \int_{B(c_y - t, y)} < grad\ \Phi, grad\ \Phi > + |\partial_t \Phi|^2\, dx$$

jest dla $0 < t < c_y$ funkcją niemalejącą.

Dowód. Aby udowodnić lemat 4.1 wystarczy pokazać, że

$$\partial_t P(t) = \partial_t \int_{B(c_y - t, y)} < grad\, \Phi, grad\, \Phi > + |\partial_t \Phi|^2\, dx \leq 0.$$

Wybierzmy c_y w taki sposób by odwzorowanie wykładnicze dla rozważanej metryki riemannowskiej było dyfeomorfizmem z kuli w przestrzeni $T_y M$ na kulę $B(c_y, y)$. Następnie zauważmy, że w tym obszarze wektor styczny do geodezyjnej jest jednocześnie wektorem normalnym do sfery więc dla $t \leq c_y$

$$\partial_t \int_{B(t,y)} \phi\, dx = \int_{\partial B(t,y)} \phi\, d\sigma,$$

gdzie $d\sigma$ jest miarą powierzchniową na ∂B. Stąd

$$\begin{aligned} \partial_t P(t) = & \int_{B(c_y - t, y)} 2 < grad\, \Phi, grad\, \partial_t \Phi > + 2\partial_t \Phi \partial_t^2 \Phi\, dx \\ & - \int_{\partial B(c_y - t, y)} < grad\, \Phi, grad\, \Phi > + |\partial_t \Phi|^2\, d\sigma. \end{aligned} \tag{27}$$

Połóżmy teraz $X_t = grad\ \Phi$ i $\phi_t = \partial_t \Phi$ tak, że X_t jest gładkim polem wektorowym i $\phi_t \in C^\infty(M)$. Na mocy definicji gradientu

$$< grad\ \phi_t, X_t >= X_t \phi_t \tag{28}$$

Z drugiej strony dla dowolnego gładkiego pola wektorowego X i funkcji $\phi \in C^\infty(M)$

$$div\, \phi X = \phi\, div\, X + X\phi, \tag{29}$$

([10] twierdzenie 7.10 str. 371). Korzystając z (28), podstawiając X_t i ϕ_t do wzoru (29) i zauważając, że $div\, X_t = -\mathfrak{L}\Phi$ na mocy (26) otrzymujemy

$$\begin{aligned} < grad\, \partial_t\Phi, grad\, \Phi >&= X_t\phi_t \\ &= div\, (\phi_t X_t) - \phi_t div\, X_t = \\ &div\, (\partial_t\Phi grad\, \Phi) - \partial_t\Phi(-\mathfrak{L}\Phi) \\ &= div\, (\partial_t\Phi grad\, \Phi) - \partial_t\Phi\partial_t^2\Phi. \end{aligned} \tag{30}$$

Na mocy (27) i (30) mamy

$$\partial_t P(t) = \int\limits_{B(c_y-t,y)} 2\, div\, (\partial_t\Phi grad\, \Phi) - \int\limits_{\partial B(c_y-t,y)} < grad\, \Phi, grad\, \Phi > + |\partial_t\Phi|^2 d\sigma.$$

Oznaczmy przez $\vec{n}$ wektor normalny do powierzchni $\partial B(c_y - t, y)$. Z twierdzenia o dywergencji mamy

$$\begin{aligned} \int\limits_{B(c_y-t,y)} 2\, div\, (\partial_t\Phi grad\, \Phi)\, dx &= 2 \int\limits_{\partial B(c_y-t,y)} < \vec{n}, \partial_t\Phi grad\, \Phi > \, d\sigma \\ &\le \int\limits_{\partial B(c_y-t,y)} < grad\, \Phi, grad\, \Phi > + |\partial_t\Phi|^2\, d\sigma, \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu 4.1 (porównaj [7] rozdz. 5, str. 209-215).

Korzystając z lematu 4.1 łatwo możemy otrzymać twierdzenie 4.1. Zauważmy najpierw, że jeżeli $\phi, \psi \in C_c^\infty(M)$, a funkcja $\Psi : M \times I\!R \mapsto I\!R$ jest określona wzorem

$$\Psi(x,t) = C_t(\sqrt{L})(\phi)(x) + S_t(\sqrt{L})(\psi)(x), \tag{31}$$

to $\Psi \in C^\infty(M \times I\!R)$ spełnia równanie (26) z warunkami początkowymi

$$\begin{aligned} \Psi(x,0) &= \phi(x), \\ \partial_t\Psi(x,0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Z lematu 4.1 wynika, że jeżeli $c_x > t$, to dla wszyskich funkcji $\phi, \psi \in C_c^\infty(M)$ takich, że

(32) $$dist\{x, \text{supp}\ \phi \cup \text{supp}\ \psi\} > t,$$

mamy $\Psi(x,t) = 0$. Stąd

(33) $$\text{supp}\ K_{C_t(\sqrt{L})}(x,\cdot) = \text{supp}\ K_{C_t(\sqrt{L})}(\cdot,x) \subset B(t,x),$$

(34) $$\text{supp}\ K_{S_t(\sqrt{L})}(x,\cdot) = \text{supp}\ K_{S_t(\sqrt{L})}(\cdot,x) \subset B(t,x).$$

Operatory $S_t(\sqrt{L})$ i $C_t(\sqrt{L})$ w mocnej topologii operatorowej są ciągłymi funkcjami zmiennej t. Dlatego dla danego punktu $x \in M$ zbiór tych t, dla których warunki (33) i (34) są spełnione jest domknięty. Stąd albo (33) i (34) jest prawdą dla wszystkich t, albo spośród takich liczb t_1, że dla wszystkich $0 \leq t \leq t_1$ spełnione są inkluzje (33) i (34), można wybrać liczbę największą. Na mocy założenia zupełności rozpatrywanej metryki riemannowskiej kula $B(t_1+1,x)$ jest zbiorem zwartym i dlatego istnieje taka stała $c > 0$, że dla każdego $y \in B(t_1+1,x)$ $c_y > c$, gdzie c_y jest stałą z lematu 4.1. Z lematu 4.1 wynika teraz, że jeżeli funkcje $\phi, \psi \in C_c^\infty(M)$ spełniają warunek (32) z t zastąpionym przez $t_1 + t_2$, to dla $t_2 \leq c$

$$(\text{supp}\ \Psi(t_2,\cdot) \cup \text{supp}\ \partial_t\Psi(t_2,\cdot)) \cap B(t_1,x) = \emptyset.$$

Ponieważ w twierdzeniu spektralnym iloczynowi funkcji odpowiada złożenie operatorów, to znaczy

$$(FG)(L) = F(L) \circ G(L),$$

to korzystając z wzorów

$$\cos(s+t) = \cos t \cos s - \sin t \sin s,$$

$$\sin(s+t) = \sin t \cos s + \sin s \cos t,$$

otrzymujemy, że

$$\Psi(t_1+t_2,x) = C_{t_1}(\sqrt{L})\Psi(t_2,\cdot)(x) + S_{t_1}\partial_t\Psi(t_2,\cdot)(x).$$

Wynika stąd, że inkluzje (33) i (34) są spełnione dla wszystkich $t \leq t_1 + c$ co jest sprzeczne z określeniem t_1. Sprzeczność ta dowodzi twierdzenia 4.1.

Prostą konsekwencją twierdzenia 4.1 jest nastepujące twierdzenie, które będziemy stosować kilkakrotnie w następnych rozdziałach

Twierdzenie 4.2 *Jeżeli ograniczona funkcja F może być przedłużona do funkcji parzystej i analitycznej na $\mathbb{C}$ spełniającej warunki twierdzenia Paley-Wienera, to znaczy*

$$F(z) \leq \gamma(1+|z|)^n \exp(r|\Im m z|)$$

dla pewnych stałych n, r i γ, to dla dystrbucji $K_{F(\sqrt{L})}$

$$\operatorname{supp} K_{F(\sqrt{L})} \subset \{(x,y) \ : \rho(x,y) \leq r\},$$

gdzie $K_{F(\sqrt{L})}$, i $\rho(\cdot,\cdot)$ są zdefiniowane tak jak w twierdzeniu 4.1.

Dowód. Załóżmy dodatkowo, że F jest funkcją z klasy Schwartza na $\mathbb{R}$. Jeżeli F jest funkcją parzystą to

$$F(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{F}(t)\cos t\sqrt{\lambda}\, dt,$$

gdzie $\hat{F}(t)$ jest transformatą Fouriera funkcji F. Stąd

$$\int_0^\infty F(\sqrt{\lambda})\, dE(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \hat{F}(t)\cos(t\sqrt{\lambda})\, dt dE(\lambda) \tag{35}$$

Ponieważ F jest funkcją należącą do klasy Schwartza,więc również $\hat{F}$ jest funkcją z tej klasy i we wzorze (35) możemy zamienić kolejność całkowania.

$$F(\sqrt{L}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{F}(t) C_t(\sqrt{L})\, dt. \tag{36}$$

Z twierdzenia Paley-Wienera wynika, że $\operatorname{supp} \hat{F} \subset [-r, r]$. Stąd na mocy (36) twierdzenie 4.2 wynika z twierdzenia 4.1.

Jeżeli F nie należy do klasy Schwartza, to niech H_t będzie gładką jednością aproksymatywną na $\mathbb{R}$ o tej własności, że $\operatorname{supp} H_t \subset [-t,t]$. Funkcja $F\hat{H}_t$ jest transformatą Fouriera funkcji $\hat{F} * H_t$. Jednak $\hat{F} * H_t$ jest funkcją gładką o nośniku zawartym w odcinku $[-(t+r), t+r]$. Funkcja $F\hat{H}_t$ należy więc do klasy Schwartza i na mocy już udowodnionej części twierdzenia 4.2 wynika, że

$$\operatorname{supp} K_{F\hat{H}_t(\sqrt{L})} \subset \{(x,y) \ : \rho(x,y) \leq r+t\}, \tag{37}$$

Z drugiej jednak strony z twierdzenia spektralnego wynika, że rodzina operatorów $F(\sqrt{L})\hat{H}_t(\sqrt{L})$ zbiega w mocnej topologii operatorowej do $F(\sqrt{L})$, co dla dowolnych funkcji $\phi, \psi \in C_c^\infty(M)$ oznacza, że

$$\lim_{t\to 0}\int_M F\hat{H}_t(\sqrt{L})\phi\bar{\psi} = \int_M F(\sqrt{L})\phi\bar{\psi}.$$

Stąd i z (37) otrzymujemy twierdzenie 4.2 dla wszystkich funkcji ograniczonych.

Pozostałą część tego rozdziału poświęcimy sformułowaniu odpowiedników twierdzeń 4.1 i 4.2 dla lewostronnie niezmienniczych operatorów działających na grupie Liego. O ile dla laplasjanu te twierdzenia są po prostu szczególnymi przypadkami twierdzeń 4.1 i 4.2 o tyle dla podlaplasjanu ich dowód będzie wymagał dodatkowej argumentacji.

Niech G będzie spójną grupą Liego . Przez $d_r g$ ($d_l g$) bedziemy oznaczać prawoniezmienniczą (odpowiednio lewoniezmienniczą) miarę Haara na G. Niech dalej $m(g)$ będzie funkcją modularną to znaczy taką, że

$$\int \phi(hg)\, d_r g = m(h)\int \phi(g)\, d_r g.$$

Przypomnijmy, jeszcze, że $d_l g = m(g) d_r g$. Jak jest to zwykle przyjęte określmy splot funkcji $\phi_1, \phi_2 \in L^1(d_r g)$ względem miary $d_r g$ jako

$$\phi *_r \psi(h) = \int \phi(hg^{-1})\psi(g)\, d_r g$$

a dla funkcji $\phi_1, \phi_2 \in L^1(d_l g)$ względem miary $d_l g$ wzorem

$$\phi *_l \psi(h) = \int \phi(g)\psi(g^{-1}h)\, d_l g$$

tak, że

$$(\phi *_r \psi) d_r g = (\phi d_r g) * (\psi d_r g)$$

oraz

$$(\phi *_l \psi) d_l g = (\phi d_l g) * (\psi d_l g),$$

gdzie splot $\nu * \mu$ miar ν i μ okreslony jest wzorem

$$\int \phi d(\nu * \mu) = \int\int \phi(gh)\, d\nu(g) d\mu(h).$$

Następnie niech $X_1, \ldots, X_k$ będzie systemem lewoniezmienniczych pól wektorowych spełniających warunek Hörmandera. Zdefiniujmy operatory $\mathfrak{L}_r$ i $\mathfrak{L}_l$ wzorami

$$\int_G \mathfrak{L}_r\phi \cdot \bar{\phi}\, d_r g = \int_G \sum_{i=1}^{k} |X_i\phi|^2 d_r g, \quad \phi \in C_c^\infty(G); \tag{38}$$

$$\int_G \mathfrak{L}_l\phi \cdot \bar{\phi}\, d_l g = \int_G \sum_{i=1}^{k} |X_i\phi|^2 d_l g, \quad \phi \in C_c^\infty(G). \tag{39}$$

Łatwo obliczyć, że

$$\mathfrak{L}_r = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

oraz

$$\mathfrak{L}_l = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2 - m^{-1}\sum_{i=1}^{k}(X_i m)X_i = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \sum_{i=1}^{k}(X_i m)(e)X_i.$$

Przez L_r (L_l) będziemy oznaczać samosprzężony operator działający na przestrzeni $L^2(d_r g)$ ($L^2(d_l g)$), będący domknięciem operatora $\mathfrak{L}_r$ ($\mathfrak{L}_l$). Jeżeli teraz $F : I\!R \mapsto I\!R$ jest ograniczoną funkcją borelowską, to operatory $F(L_r) : L^2(d_r g) \to L^2(d_r g)$ i $F(L_l) : L^2(d_l g) \to L^2(d_l g)$ zdefiniowane przez twierdzenie spektralne są lewoniezmiennicze na G, więc istnieją takie dystrybucje $K'_{F(L_r)}$ (odpowiednio $K'_{F(L_l)}$), że

$$F(L_r)(\phi) = \phi *_r K'_{F(L_r)}, \tag{40}$$

$$\Big(F(L_l)(\phi) = \phi *_l K'_{F(L_l)}\Big)$$

dla wszystkich $\phi \in C_c^\infty(G)$. Zauważmy, że miedzy jądrami splotowymi $K'_{F(L_r)}$, $K'_{F(L_l)}$ operatorów $F(L_r)$ i $F(L_r)$, a ich jądrami zdefiniowanymi wzorem (22) zachodzą następujące związki

$$K'_{F(L_r)}(x) = K_{F(L_r)}(e, x),$$

$$K'_{F(L_l)}(x) = K_{F(L_l)}(e, x)$$

oraz

$$K_{F(L_r)}(x, y) = K'_{F(L_r)}(x^{-1}y)m(x^{-1}),$$

$$K_{F(L_l)}(x, y) = K'_{F(L_l)}(x^{-1}y).$$

W dalszym ciągu, jeżeli nie będzie to powodować niejasności, bedziemy opuszczać indeksy l i r, szczególnie w przypadku grup unimodularnych kiedy miary $d_l g$, $d_r g$ sploty $*_l$, $*_r$ i operatory L_l, L_r pokrywają się. Będziemy również przy pewnym nadużyciu notacji opuszczać $'$ w oznaczeniu (40) jądra splotowego nie robiąc rozróżnienia miedzy jądrem splotowym i jądrem operatora określonym wzorem (22).

Zanim przejdziemy do sformułowania twierdzeń dotyczących nośników jąder splotowych zauważmy jeszcze, że ponieważ operatory $\mathfrak{L}_r$ i $\mathfrak{L}_l$ zadane wzorami (38) i (39) są lewostronnie niezmiennicze, to są one w pełni określone poprzez formę kwadratową $\sum_{i=1}^k X_i^2(\cdot)$ zdefiniowaną na przestrzeni kostycznej do elementu neutralnego e grupy G. Wynika stąd, że możemy znaleźć taki system $Y_1, \dots, Y_l$ lewoniezmienniczych pól wektorowych, który jest liniowo niezależny i podstawiony do wzorów (38) i (39) da ten sam operator co system $X_1, \dots, X_k$. Dlatego możemy zakładać, że pola $X_1, \dots, X_k$ są liniowo niezależne. Jeżeli ponadto system wektorów $X_1, \dots, X_k$ jest bazą w $\mathfrak{g}$, to dla $\phi \in C^\infty(G)$

$$\sum_{i=1}^k |X_i \phi(g)|^2 =< grad\ \phi(g), grad\ \phi(g) >,$$

gdzie gradient i iloczyn skalarny jest liczony względem metryki Riemanna, dla której układ $X_1, \dots, X_k$ jest bazą ortonormalną. Jeżeli teraz położymy $X = grad\ \phi$, to korzystając ze wzorów (28) i (29) otrzymujemy, że

$$< grad\ \phi, grad\ \phi >= X\phi = div\ \phi X - \phi div\ X. \tag{41}$$

Dla funkcji $\phi \in C_c^\infty(G)$ niech $\Omega \subset G$ będzie zbiorem otwartym, ograniczonym o gładkim brzegu takim, że supp $\phi \subset \Omega$ i $\phi(g) = 0$ dla $g \in \partial\Omega$. Z twierdzenia Stokesa, na mocy (41), mamy

$$\int_G < grad\ \phi, grad\ \phi > \ d\omega = \int_\Omega < grad\ \phi, grad\ \phi > \ d\omega =$$
$$\int_{\partial\Omega} \phi grad\ \phi\ d\sigma - \int_\Omega \phi div_{d\omega}\ grad\ \phi\ d\omega = -\int_G \phi div_{d\omega}\ grad\ \phi\ d\omega.$$

Stąd

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}_r \phi = -div_{d_r g}\ grad\ \phi \\ (\mathfrak{L}_l \phi = -div_{d_l g}\ grad\ \phi)\,. \end{gathered} \tag{42}$$

Udowodnimy teraz twierdzenie o skończonej prędkości propagacji rozwiązań równania fali dla operatorów L_r i L_l.

Twierdzenie 4.3 *Jeżeli zbiór $X_1, \ldots, X_k$ spełnia warunek Hörmandera, operatotry L_r i L_l są zdefiniowany wzoremi (38),(39) i $\rho(\cdot,\cdot)$ jest odległością określoną w definicji 2.2 odpowiadającą układowi $X_1, \ldots, X_k$, to*

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{supp} K_{C_t(\sqrt{L_r})} \subset \{g \in G : \rho(g,e) \leq t\}, \\
&\operatorname{supp} K_{C_t(\sqrt{L_l})} \subset \{g \in G : \rho(g,e) \leq t\}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Uwaga. Powtarzając dowód twierdzenia 4.2 z twierdzenia 4.3 dostajemy następującą wersję twierdzenia 4.2.

Twierdzenie 4.4 *Jeżeli ograniczona funkcja F może być przedłużona do funkcji parzystej i analitycznej na $\mathbb{C}$ spełniającej warunki twierdzenia Paley-Wienera, to znaczy*

$$F(z) \leq \gamma(1+|z|)^n \exp(r|\Im m z|)$$

dla pewnych stałych n, r i γ, to

$$\operatorname{supp} K_{F(\sqrt{L_r})} \subset \{g \in G\ : \rho(g,e) \leq r\},$$

$$\operatorname{supp} K_{F(\sqrt{L_l})} \subset \{g \in G\ : \rho(g,e) \leq r\},$$

gdzie L_r, L_l i $\rho(\cdot,\cdot)$ są określone tak jak w twierdzeniu 4.3.

Dowód twierdzenia 4.3. Udowodnimy twierdzenie 4.3 tylko dla operatora L_r. Dowód dla operatora L_l jest analogiczny. Jeżeli $X_1, \ldots, X_k$ jest bazą $\mathfrak{g}$ to twierdzenie 4.3 wynika z twierdzenia 4.1 i wzoru (42).

Jeżeli $X_1, \ldots, X_k$ nie jest bazą $\mathfrak{g}$, to wybierzmy wektory $Y_1, \ldots, Y_m$ w taki sposób by układ $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_s$ był bazą $\mathfrak{g}$ i dla $\epsilon \geq 0$ zdefiniujmy operator $\mathfrak{L}_r^\epsilon$ wzorem

$$\mathfrak{L}_r^\epsilon \phi = -div_{d_r g}\ grad_\epsilon\ \phi = -\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \phi - \epsilon^2 \sum_{i=1}^{l} Y_i^2 \phi, \quad \phi \in C_c^\infty,$$

gdzie $grad_\epsilon$ jest liczony względem lewoniezmienniczej metryki riemannowskiej dla, której układ $X_1, \ldots, X_k, \epsilon Y_1, \ldots, \epsilon Y_s$ jest bazą ortonormalną. Podobnie jak poprzednio przez L_r^ϵ będziemy oznaczać domknięcie operatora $\mathfrak{L}_r^\epsilon$ Następnie zdefiniujmy dystrybucje $P_\epsilon \in D'(G \times \mathbb{R})$ wzorem

$$< P_\epsilon, \Phi >= - \int_0^\infty S_t(L_r^\epsilon)(\Phi(\cdot, t))(e)\, dt \tag{44}$$

gdzie $\Phi \in C_c^\infty(G \times I\!R)$, a $S_t(L_r^\epsilon)(\Phi(\cdot, t))(e)$ jest wartością w e funkcji $\Phi(\cdot, t)$ zmiennej $\cdot$ po nałożeniu operatora $S_t(L_r^\epsilon)$. Zauważmy , że dystrybucja P_ϵ jest rozwiązaniem fundamentalnym dla operatora $L_r^\epsilon + \partial_t^2$, to znaczy

$$(L_r^\epsilon + \partial_t^2) * P_\epsilon = P_\epsilon * (L_r^\epsilon + \partial_t^2) = \delta_{(e,0)}. \tag{45}$$

W powyższym wzorze przy pewnym nadużyciu notacji traktujemy $L_r^\epsilon + \partial_t^2$ jako taką dystrybucję, że $\Phi(*L_r^\epsilon + \partial_t^2) = (L_r^\epsilon + \partial_t^2)\Phi$. Rzeczywiście ponieważ na mocy twierdzenia spektralnego mamy $\partial_t S_t(L_r^\epsilon) = C_t(L_r^\epsilon)$, $\partial_t C_t(L_r^\epsilon) = -L_r^\epsilon S_t(L_r^\epsilon)$ i $C_0(L_r^\epsilon) = Id$, $S_0(L_r^\epsilon) = 0$, więc całkując dwukrotnie przez części otrzymamy

$$\begin{aligned} &< (\partial_t^2 + L_r^\epsilon)P_\epsilon, \Phi >=< L_r^\epsilon P_\epsilon, \Phi > + < P_\epsilon, \partial_t^2 \Phi >=< L_r^\epsilon P_\epsilon, \Phi > \\ -S_0(L_r^\epsilon)&(\partial_t \Phi(\cdot, 0))(e) + C_0(L_r^\epsilon)(\Phi(\cdot, 0))(e) - \int_0^\infty \partial_t^2 S_t(L_r^\epsilon)(\Phi(\cdot, t))(e)\, dt \\ &=< L_r^\epsilon P_\epsilon, \Phi > + \int_0^\infty L_r^\epsilon S_t(L_r^\epsilon)(\Phi(\cdot, t))(e)\, dt + \Phi(e, 0) = \Phi(e, 0). \end{aligned}$$

(porównaj [15] roz. 6.2). Ponieważ $X_1, \ldots, X_k, \epsilon Y_1, \ldots, \epsilon Y_s$ jest bazą w $\mathfrak{g}$, więc na mocy udowodnionej już części twierdzenia 4.3, dla $\epsilon > 0$ mamy

$$\text{supp } P_\epsilon \subset \{(g, t) : \rho_\epsilon(g) \leq t\}, \tag{46}$$

gdzie $\rho_\epsilon(\cdot, \cdot)$ jest odległością w metryce riemannowskiej odpowiadającej układowi $X_1, \ldots, X_k, \epsilon Y_1, \ldots, \epsilon Y_s$. Jeżeli udowodnimy, że nośniki dystrybucji P_ϵ zbiegają do nośnika P_0, to na mocy lematu 2.4 otrzymamy, że

$$\text{supp } P_0 \subset \{(g, t) : \rho(e, g) \leq t\}. \tag{47}$$

Stąd

$$\text{supp } K_{S_t(\sqrt{L})} \subset \{g \in G : \ \rho(e, g) \leq t\}.$$

Ale $C_t(\sqrt{L}) = \partial_t S_t(\sqrt{L})$ i na mocy powyższej inkluzji otrzymamy twierdzenie 4.3. Aby więc zakończyć dowód twierdzenia 4.3 wystarczy udowodnić nastepujący lemat

Lemat 4.2 *Jeżeli P_ϵ, $\epsilon \geq 0$, jest zdefiniowane wzorem (44), to*

$$\lim_{\epsilon\to 0} P_\epsilon = P_0,$$

gdzie zbieżność jest rozumiana w sensie dystrybucjnym.

Dowód. Udowodnimy najpierw, że

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 P_\epsilon = 0 \tag{48}$$

Aby pokazać (48) zdefiniujmy operator $\tilde{\Delta}$ jako

$$\tilde{\Delta}\phi = -div_{d_r g}\, grad_r\, \phi,$$

gdzie $grad_r$ jest określony względem dowolnej ustalonej metryki prawoniezmienniczej na G. Stosując analogiczny do wzoru (42) wzór dla operatora $\tilde{\Delta}$ nietrudno zauważyć, że operator ten jest operatorem prawoniezmienniczym. Z klasycznej nierówności Sobolewa otrzymujemy, że

$$|\phi(e)| \leq C\|(I+\tilde{\Delta})^{\frac{1+n}{2}}\phi\|_{L^2(d_r x)}$$

Dlatego, jeżeli $\Phi \in C_c^\infty(G\times R)$, to

$$\begin{aligned} |< P_\epsilon, \Phi >| &= |\int_0^\infty S_t(L_r^\epsilon)\Phi(\cdot,t)(e)\,dt| \\ &\leq C\int_0^\infty \|(I+\tilde{\Delta})^{\frac{n+1}{2}} S_t(L_r^\epsilon)\Phi\|_{L^2(d_r x)}\,dt \\ &\leq C\int_0^\infty t\|(I+\tilde{\Delta})^{\frac{n+1}{2}}\Phi\|_{L^2(d_r x)}\,dt, \end{aligned} \tag{49}$$

Wzór (49) otrzymujemy na mocy tego, że operatory $\tilde{\Delta}$ i $S_t(L_r^\epsilon)$ komutują i

$$\|S_t(L_r^\epsilon)\|_{L^2(d_r g)\to L^2(d_r g)} \leq t.$$

Dowodzi to (48) ponieważ ostatnia całka nie zależy od ϵ.

Na mocy wzoru (44) mamy

$$\text{supp } P_0 \subset G\times(\mathbb{R}^+\cup\{0\}).$$

Stąd i z (46) wnioskujemy, że zbiór supp $P_0 \cap g(\text{supp } P_\epsilon)$ jest zwarty dla każdego $g \in G$. Tak więc splot dystrybucji P_0 i P_ϵ jest dobrze określony (patrz [15] wzór (4.2.6) str. 104) i z (45) mamy

$$\begin{aligned} P_0 = P_0 * \Big((\partial_t^2 + L_r^\epsilon) * P_\epsilon\Big) = \Big(P_0 * (\partial_t^2 + L_r^0)\Big) * P_\epsilon \\ -P_0 * \epsilon^2(Y_1^2 + \ldots + Y_l^2) * P_\epsilon = P_\epsilon - P_0 * (Y_1^2 + \ldots + Y_l^2) * (\epsilon^2 P_\epsilon) \end{aligned}$$

co na mocy (48) dowadzi lematu 4.2.

5 Ostre punktowe oszacowania dla jąder ciepła

W tym rozdziale będziemy rozważać te operatory, dla których w części poprzedniej udowodniliśmy własność skończonej prędkości propagacji rozwiązań fali, to znaczy samosprzężonych rozszerzeń operatorów zdefiniowanych na dowolnej rozmaitości riemannowskiej wzorem (20) lub domknięć grupowo niezmienniczych eliptycznych i podeliptycznych operatorów określonych wzorami (38) lub (39). Jądro ciepła generowane przez tego typu operator L zdefiniujemy wzorem

$$p_t(x, y) = K_{H_t(L)}(x, y), \tag{50}$$

gdzie $H_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$.

Punktem wyjścia dla naszych rozważań będzie nastepujące założenie

$$\sup_x p_t(x, x) \leq \begin{cases} Ct^{-d/2} & \text{jeżeli } t \leq 1 \\ Ct^{-D/2} & \text{jeżeli } t > 1. \end{cases} \tag{51}$$

W [5] E. B. Davies udowodnił , że dla jądra ciepła generowanego przez operator Laplace'a-Beltramiego na zupełnej rozmaitosci riemanowskiej z (51) wynika następujące oszacowanie:

$$p_t(x, y) \leq \begin{cases} C_\epsilon t^{-d/2} \exp(\frac{-\rho(x,y)^2}{(4+\epsilon)t}) & \text{jeżeli } t \leq 1 \\ C_\epsilon t^{-D/2} \exp(\frac{-\rho(x,y)^2}{(4+\epsilon)t}) & \text{jeżeli } t > 1, \end{cases} \tag{52}$$

gdzie ϵ jest dowolną dotatnia liczbą rzeczywistą. Następnie w [6] E. B. Davies i M. M. H. Pang, a w [3] Th. Coulhon pokazali, że tak jak w przypadku jądra Gaussa na $\mathbb{R}^n$ można z oszacowań (52) usunąć ϵ tyle, że w odróżnieniu od klasycznego jądra Gaussa można to zrobić tylko kosztem dopisania dodatkowego wielomianowego czynnika. Dokładniej, udowodnili oni nastepujące wzmocnienie nierówności (52): jeżeli $d \leq D$, to

$$\begin{aligned} p_t(x, y) \leq c \min \Big\{ & t^{-d/2}(1 + \rho(x, y)/\sqrt{t})^d, \\ & t^{-D/2}(1 + \rho(x, y)/\sqrt{t})^D \Big\} \exp\left(\frac{-\rho(x, y)^2}{4t}\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Jeżeli natomiast $d > D$, to

$$p_t(x, y) \leq c \max \Big\{ t^{-d/2}(1 + \rho(x, y)/\sqrt{t})^d, \tag{54}$$

$$t^{-D/2}(1+\rho(x,y)/\sqrt{t})^D\Big\}\exp\left(\frac{-\rho(x,y)^2}{4t}\right).$$

Wcześniej nieco słabsze oszacowania tego typu, wymagające wyższego stopnia dodatkowego wielomianowego czynnika udowodnił N. Th. Varopoulos w [26]. Dodatkowe dane dotyczące historii gaussowskich oszacowań typu (52) można znaleźć w [6] i [3]. Celem tego rozdziału jest udowodnienie silniejszych oszacowań przy czym stopień dodatkowego wielomianowego czynnika w naszych oszacowaniach będzie z dokładnością do dowolnego $\epsilon > 0$ najmniejszym możliwym do uzyskania (w uwagach na końcu tego rozdziału wyjaśnimy to dokładniej). Dowody w [6] i [3] opierają się na metodzie zaburzania jąder ciepła. Nasz dowód będzie się opierał na własności skończonej prędkości propagacji rozwiązania równania fali. Idea wykorzystania skończonej prędkości propagacji fali do uzyskania oszacowań dla jądra ciepla byla używana wcześniej na przykad w [19], jednak dzieki zastosowaniu wzoru (61) zamiast (36) do powiązania równania fali i półgrupy ciepła jesteśmy w stanie otrzymać silniejsze oszacowania.

Niech jądro $K_{F(L)}$ będzie zdefiniowane wzorem (22). Zauważmy, że

$$K_{F(L)}(x,y) = K_{F(L)}(y,x),$$

$$K_{\bar{F}(L)}(x,y) = \overline{K_{F(L)}(y,x)},$$

oraz

$$p_{2t}(y,y) = \|p_t(y,\cdot)\|^2_{L^2(dx)}.$$

Ponadto

(55)
$$\|F(L)\|_{L^1(dx)\mapsto L^2(dx)} = \|F(L)\|_{L^2(dx)\mapsto L^\infty(dx)} = \sup_y \|K_{F(L)}(y,\cdot)\|_{L^2(dx)}$$

Udowodnimy teraz następujacy lemat

Lemat 5.1 *Dla miara μ_y jest określonej wzorem*

(56)
$$\int_0^\infty F(\lambda)\,d\mu_y(\lambda) = \int_0^\infty F(\sqrt{\lambda})e^{2\lambda}\,d(E(\lambda)p_1(y,\cdot),p_1(y,\cdot)),$$

mamy

$$\|K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot)\|^2_{L^2(dx)} = \int_0^\infty |F(\lambda)|^2\,d\mu_y(\lambda).$$

Dowód. Połóżmy $H(\lambda) = e^{-\lambda}$. Na mocy defincji $F(L)$ i $K_{F(L)}$ mamy

$$
\begin{aligned}
\|K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot)\|_{L^2} &= \int d(E(\lambda)K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot), K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot)) \\
&= \int H^2(\lambda)H^{-2}(\lambda)\, d(E(\lambda)K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot), K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot)) \qquad (57)\\
&= \int e^{2\lambda}\, d(E(\lambda)H(L)(K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot)), H(L)(K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot))).
\end{aligned}
$$

Dalej

$$
H(L)(K_{F(\sqrt{L})}(y,\cdot)) = K_{HD(L)} = K_{DH(L)} = F(\sqrt{L})p_1(y,\cdot),
$$

gdzie $D(\lambda) = F(\sqrt{\lambda})$. Stąd wobec (57)

$$
\begin{aligned}
\|K_{F(\sqrt{L})(y,\cdot)}\|_{L^2(dx)} &= \int e^{2\lambda}\, d(E(\lambda)F(\sqrt{L})p_1(y,\cdot), F(\sqrt{L})p_1(y,\cdot)) \\
&= \int |F(\sqrt{\lambda})|^2 e^{2\lambda}\, d(E(\lambda)p_1(y,\cdot), p_1(y,\cdot))
\end{aligned}
$$

co dowodzi lematu 5.1.

Nasze oszacowania dla jąder ciepła możemy sformułować w postaci następującego twierdzenia

Twierdzenie 5.1 *Niech p_t będzie jądrem ciepła zdefiniowanym wzorem (50). Załóżmy ponadto, że spełniona jest nierowność (51). Wtedy istnieje stała C_ϵ zależąca tylko od ϵ, d i D taka, że jeżeli $d \le D$, to*

$$
\begin{aligned}
p_t(x,y) \le CC_\epsilon \min\Big\{ & t^{-d/2}(1+\rho(x,y)/\sqrt{t})^{d-1+\epsilon}, \\
& t^{-D/2}(1+\rho(x,y)/\sqrt{t})^{D-1+\epsilon}\Big\} \exp\left(-\frac{\rho(x,y)^2}{4t}\right)
\end{aligned} \qquad (58)
$$

i jeżeli $d > D$, to

$$
\begin{aligned}
p_t(x,y) \le CC_\epsilon \max\{t^{-d/2},\ t^{-D/2}\}&(1+\rho(x,y)/\sqrt{t})^{d-1+\epsilon} \\
&\cdot \exp\left(\frac{-\rho(x,y)^2}{4t}\right).
\end{aligned} \qquad (59)
$$

Dowód. Zaczniemy dowód twierdzenia 5.1 od przypadku $d = D$. Wtedy (58) i (59) redukują się do następującej nierówności

$$p_t(x, y) \leq CC_\epsilon t^{-d/2} t(1 + \rho(x, y)/\sqrt{t})^{d-1+\epsilon} \exp\left(\frac{-\rho(x, y)^2}{4t}\right).$$

Niech

$$(x)_+ = \begin{cases} x & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić przez bezpośredni rachunek, dla $\alpha \geq 0$

$$\exp(-x^2) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty (r^2 - x^2)_+^\alpha r e^{-r^2}\, dr.$$

Stąd

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(\frac{-x^2}{4t}) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\frac{1}{4t})^{\alpha+3/2} (r^2 - x^2)_+^\alpha r e^{\frac{-r^2}{4t}}\, dr.$$

Stosując transformatę Fouriera do obu stron powyższej tożsamości otrzymamy

$$\exp(-t\lambda^2) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty (\frac{1}{4t})^{\alpha+3/2} F_r^\alpha(\lambda) r e^{\frac{-r^2}{4t}}\, dr, \tag{60}$$

gdzie F_r^α jest transformatą Fouriera funkcji $x \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}(r^2 - x^2)_+^\alpha$. Z (60) wynika, że

$$\exp(-tL) = \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty (\frac{1}{4t})^{\alpha+3/2} F_r^\alpha(\sqrt{L}) r e^{-\frac{-r^2}{4t}}\, dr. \tag{61}$$

Udowodnimy najpierw twierdzenie 5.1 dla $d = D$ przy następującym dodatkowym założeniu

$$|K_{F_r^\alpha(\sqrt{L})}(x, y)| \leq CC_1(\alpha, d) r^{2\alpha-d+1}, \tag{62}$$

dla $\alpha > d - 1$. Wprost z definicji funkcji F_r^α wynika, że

$$\operatorname{supp} \hat{F}_r^\alpha \subset [-r, r]$$

i na mocy twierdzenia 4.2

$$\operatorname{supp} K_{F_r^\alpha(\sqrt{L})}(x, \cdot) \subset B_r(x). \tag{63}$$

Teraz na mocy (61) i (63)

$$p_t(x,y) \le \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty (\frac{1}{4t})^{\alpha+3/2} |K_{F_r^\alpha(\sqrt{L})}(x,y)| r e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dr \tag{64}$$
$$= \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{\rho(x,y)}^\infty (\frac{1}{4t})^{\alpha+3/2} |K_{F_r^\alpha(\sqrt{L})}(x,y)| r e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dr.$$

Z (62) wynika, że

$$\int_{\rho(x,y)}^\infty (\frac{1}{4t})^{\alpha+3/2} |K_{F_r^\alpha(\sqrt{L})}(x,y)| r e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dr$$
$$\le CC_1(d,\alpha) \int_{\rho(x,y)}^\infty (\frac{1}{4t})^{\alpha+3/2} r^{2\alpha-d+1} r e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dr \tag{65}$$
$$= CC_1(d,\alpha)(4t)^{-d/2} \int_{\rho(x,y)/\sqrt{4t}}^\infty r^{2\alpha-d+1} r e^{-r^2}\, dr.$$

Używając elementarnej nierówności

$$\int_a^\infty r^\gamma r e^{-r^2}\, dr \le C_\gamma (1+a)^\gamma \exp(-a^2),$$

otrzymamy twierdzenie 5.1 przy założeniu (62) dla przypadku $d = D$ kładąc $\gamma = 2\alpha - d + 1$, $\alpha = \epsilon/2 + d - 1$ i $C_\epsilon = 4^{-d/2}\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} C_1(d,\alpha) C_\gamma$.

Dowód (62). Na mocy założeń mamy

$$\|p_t(x,\cdot)\|^2_{L^2(dx)} = p_{2t}(x,x) \le C(2t)^{-\frac{d}{2}}.$$

Niech μ_x będzie miarą zadaną przez (56). Wtedy

$$\mu_x([0,r)) \le e \int_0^r e^{-\lambda^2 r^{-2}} d\mu_x(\lambda) \tag{66}$$
$$\le e \int_0^\infty e^{-\lambda^2 r^{-2}} d\mu_x(\lambda) = e\|p_{r^{-2}}(x,\cdot)\|_{L^2} \le e 2^{-\frac{d}{2}} C r^d.$$

Teraz dla funkcji F, połóżmy $S = \mathrm{sign} F \sqrt{|F|}$ i $H = \sqrt{|F|}$. Wtedy $F = SH$, więc

$$|K_{F(\sqrt{L})}(x_1,x_2)| = |\int_M K_{S(\sqrt{L})}(x_1,y) K_{H(\sqrt{L})}(y,x_2)\, dy|$$
$$\le \|K_{S(\sqrt{L})}(x_1,\cdot)\|_{L^2} \|K_{H(\sqrt{L})}(x_2,\cdot)\|_{L^2}$$
$$= (\int_0^\infty |K(\lambda)|^2\, d\mu_{x_1}(\lambda))^{1/2} (\int_0^\infty |H(\lambda)|^2\, d\mu_{x_2}(\lambda))^{1/2}$$
$$= (\int_0^\infty |F(\lambda)|\, d\mu_{x_1}(\lambda))^{1/2} (\int_0^\infty |F(\lambda)|\, d\mu_{x_2}(\lambda))^{1/2}$$

czyli

$$(67)\quad |K_{F(\sqrt{L})}(x_1,x_2)| \le (\int_0^\infty |F(\lambda)|\, d\mu_{x_1}(\lambda))^{1/2}(\int_0^\infty |F(\lambda)|\, d\mu_{x_2}(\lambda))^{1/2}.$$

Z drugiej strony jednak nietrudny rachunek pokazuje, że dla pewnej stałej C_α niezależącej od λ i r,

$$|F_r^\alpha(\lambda)| \le C_\alpha \frac{r^{2\alpha+1}}{1+|r\lambda|^{\alpha+1}}, \tag{68}$$

stąd na mocy (66)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |F_r^\alpha(\lambda)|\, d\mu_x(\lambda) &\le C_\alpha \int_0^\infty \frac{r^{2\alpha+1}}{1+|r\lambda|^{\alpha+1}}\, d\mu_x(\lambda) \\
&= C_\alpha \int_0^\infty \int_\lambda^\infty -\frac{d}{ds}(\frac{r^{2\alpha+1}}{1+(rs)^{\alpha+1}})\, ds\, d\mu_x(\lambda) \\
&= C_\alpha \int_0^\infty -\frac{d}{ds}(\frac{r^{2\alpha+1}}{1+(rs)^{\alpha+1}}) \int_0^s d\mu_x(\lambda)\, ds \\
&\le C_\alpha \int_0^\infty \frac{(\alpha+1)r^{3\alpha+2}s^\alpha}{(1+(rs)^{\alpha+1})^2} e2^{-\frac{d}{2}} C s^d ds \\
&= r^{2\alpha-d+1} C C_\alpha e 2^{-\frac{d}{2}}(\alpha+1) \int_0^\infty \frac{s^\alpha s^d}{(1+s^{\alpha+1})^2}\, ds,
\end{aligned}$$

co na mocy (67) dowodzi (62).

Powyższy dowód nierówności (62) kończy dowód twierdzenia 5.1 dla $d = D$. Jeżeli $d < D$, to

$$p_t(x,x) \le Ct^{-\frac{\gamma}{2}}$$

dla wszystkich $d \le \gamma \le D$, stąd otrzymamy (58) na mocy przypadku $d = D$. Aby dowieść twierdzenia 5.1 w przypadku $d > D$ zauważmy, że jeżeli $f(x) = \cos t\sqrt{x^2+a}$, to z twierdzenia Paley-Wienera mamy

$$\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-t,t]$$

i z twierdzenia 4.2 wynika, że twierdzenie 4.1 jest prawdziwe również, jeżeli zastąpimy operator L przez operator $L+a$, dlatego możemy stosować udowodnioną już część twierdzenia 5.1 do operatora $L+a$. Jeżeli jednak p_t jest jądrem ciepła generowanym przez operator L, to $p_t e^{-ta}$ jest jądrem ciepła generowanym przez operator $L+a$. Zauważmy teraz, że dla $a \le 1$

$$p_t(x,x)e^{-ta} \le c_1 C a^{\frac{D-d}{2}} t^{-\frac{d}{2}}.$$

i na mocy udowodnionego już przypadku $d = D$

$$p_t(x,y)e^{-ta} \le c_1 C a^{\frac{D-d}{2}} C_\epsilon (t^{-d/2}(1+\rho(x,y)/\sqrt{t})^{d-1+\epsilon} \exp\left(-\frac{\rho(x,y)^2}{4t}\right).$$

Stąd dostajemy (59) kładąc $a = 1$ dla $t \le 1$ i $a = 1/t$ dla $t > 1$.

Uwagi. 1. W [20] S. A. Molchanov pokazał, że jeżeli N i S są przeciwnymi biegunami d wymiarowej sfery, to

$$(69)\quad p_t(N,S) \sim t^{-d/2}(1+\rho(S,N)/\sqrt{t})^{d-1} \exp\left(-\frac{\rho(N,S)^2}{4t}\right) \quad \text{gdy } \ t \downarrow 0.$$

(69) pokazuje, że oszacowania (58) i (59), co najmniej w przypadku $d \le D$ lub gdy t dąży do zera, mają z dokładnością do ϵ najniższy stopień dodatkowego wielomianowego czynnika, jaki możemy otrzymać, nie robiąc dodatkowych założeń o operatorze L.

2. Oszacowania (58) i (59), które otrzymaliśmy, są silniejsze niż (54) i (53), dla $d \le D$ lub gdy $t \to 0$. Nie wiemy jednak czy również dla $d > D$ i dużych t jest możliwe poprawienie oszacowań (53).

Zakończymy ten rozdział innym dowodem skończonej prędkości propagacji rozwiązań równania fali. Podczas gdy dowody skończonej prędkości propagacji fali w rozdziale trzecim opierały się na konkretnej postaci operatorów, twierdzenie które sformułujemy poniżej korzysta tylko z oszacowań gaussowskich dla jąder ciepła. Dowód ten pokazuje, że własność skończonej propagacji rozwiązań równania fali i gausowskie oszacowania jądra ciepła są w pewnym sensie równoważne.

Twierdzenie 5.2 *Niech M będzie przestrzenią z miarą dx i metryką $\rho(\ ,\ )$, L samosprzężonym dodatnio określonym operatorem na $L^2(dx)$ i załóżmy, że*

$$\|H_t(L)\|^2_{L^2(dx)\mapsto L^\infty(dx)} \le \begin{cases} Ct^{-d/2} & \text{jeżeli } t \le 1 \\ Ct^{-D/2} & \text{jeżeli } t > 1 \end{cases},$$

gdzie $H_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$. *Niech dalej dla półgrupy generowanej przez* L *zachodzą następujące gaussowskie oszacowania*

$$p_t(x,y) \leq \begin{cases} Ct^{-d/2}\exp(b^2\frac{-\rho(x,y)^2}{4t}) & \textit{jeżeli } t \leq 1 \\ Ct^{-D/2}\exp(b^2\frac{-\rho(x,y)^2}{4t}) & \textit{jeżeli } t > 1, \end{cases} \tag{70}$$

gdzie $b > 0$ *jest stałą rzeczywistą. Wtedy, jeżeli* $\phi, \psi \in L^2(dx)$ *i* $\phi(z) = 0$ *dla* $z \notin B(\xi_1, x)$, $\psi(z) = 0$ *dla* $z \notin B(\xi_2, y)$, *to*

$$< C_t(\sqrt{L})\phi, \psi >= 0, \tag{71}$$

dla $|t| < b(\rho(x,y) - \xi_1 - \xi_2)$.

Dowód. Udowodnimy twierdzenie 5.2 dla $d = D$. Uogólnienie dowodu dla pozostałych przypadków nie jest trudne. Zauważmy najpierw, że zastępując metrykę ρ metryką $\rho' = b\rho$ możemy przyjąć, że $b = 1$. Po drugie ponieważ założyliśmy, iż operator L jest samosprzężony i dodatnio określony to z twierdzenia spektralnego wynika, że półgrupa ciepła $H_t(L)$ przedłuża się na $L^2(dx)$ do analitycznej półgrupy na półpłaszczyźnie $\Re e\ z \geq 0$. W [4] Davies udowodnił, że to analityczne przedłużenie ma następującą własność

Twierdzenie 5.3 *(Davis [4] Theorem 3.4.8 str. 103). Jeżeli* $p_z(x,y)$ *jest jądrem analitycznego przedłużenia półgrupy spełniającej założenia twierdzenia 5.2, to*

$$|p_z(x,y)| \leq C_\delta(\Re e\ z)^{-d/2}\exp(-\Re e\ \frac{\rho(x,y)^2}{(4+\delta)z}). \tag{72}$$

Ponieważ w [4] twierdzenie 5.3 ma nieco inne założenia to dla pełności dowodu przytoczymy tu dowód tego twierdzenia.

Dowód. Kładąc $z = t + is$ otrzymujemy

$$H_z(L) = H_{t/2}(L)H_{is}(L)H_{t/2}(L).$$

Stąd

$$\|H_z(L)\|_{L^1 \mapsto L^\infty} \leq \|H_{t/2}(L)\|_{L^1 \mapsto L^2} \cdot \|H_{t/2}(L)\|_{L^2 \mapsto L^\infty}$$

i na mocy założeń

$$|p_z(x,y)| \leq C_1(\Re ez)^{-d/2}. \tag{73}$$

Następnie w kącie $W = \{z : \ 0 \le \arg z \le \gamma\}$, gdzie $0 < \gamma < \pi/2$ zdefinujmy analityczną funkcję f wzorem

$$f(z) = z^{-d/2} p_{z^{-1}}(x,y) \exp(\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 e^{i(\frac{\pi}{2}-\gamma)} z/\sin\gamma).$$

Jeżeli $z = re^{i\theta}$ i $\theta = 0$, to na mocy (70) mamy

$$|f(z)| = r^{-d/2} C r^{d/2} e^{-\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 r} \exp(\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 r/\sin\gamma \Re e\ e^{i(\frac{\pi}{2}-\gamma)}) = C.$$

Jeżeli $z = re^{i\theta}$ i $\theta = \gamma$, to z (73) wynika, że

$$|f(z)| \le r^{-d/2} C_1 (\Re e\ z^{-1})^{-d/2} = C_1 (\cos\gamma)^{-d/2}.$$

Jeżeli natomiast $z = re^{i\theta}$ i $0 < \theta < \gamma$, to

$$|f(z)| = r^{-d/2} C_1 (\Re e z)^{-d/2} \exp((\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 r/\sin\gamma) \Re e\ e^{i(\frac{\pi}{2}-\gamma+\theta)}) \le$$
$$C_1(\cos\gamma)^{-d/2} \exp(\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 r/\sin\gamma).$$

Z twierdzenia Phragmena-Lindelöfa wynika teraz, że

$$|f(z)| \le C_2 (\cos\gamma)^{-d/2}$$

dla wszystkich $z \in W$. Jednakże

$$p_z(x,y) = z^{-d/2} f(z^{-1}) \exp(-\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 e^{i(\frac{\pi}{2}-\gamma)}/(z\sin\gamma))$$

Stąd dla $-\gamma < \theta < 0$ mamy

$$|p_z(x,y)| \le r^{-d/2} C_2 (\cos\gamma)^{-d/2} \exp(-\Re e \frac{1}{4}\rho(x,y)^2/(z\sin\gamma))$$
$$\le C_2 (\Re e z)^{-d/2} (\frac{\cos\theta}{\cos\gamma})^{d/2} \exp(-\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 \sin(\gamma-\theta)/(r\sin\gamma)).$$

Zastępując z przez $\bar{z}$ otrzymujemy

$$|p_z(x,y)| \le C_2 (\Re e z)^{-d/2} (\frac{\cos\theta}{\cos\gamma})^{d/2} \exp(-\frac{1}{4}\rho(x,y)^2 \sin(\gamma-|\theta|)/(r\sin\gamma))$$

dla $|\arg z| \le \gamma < \frac{\pi}{2}$. Powyższa nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $\Re ez > 0$ i jeżeli dla $0 < \delta < 1$ położymy

$$\gamma = (\frac{\pi}{2})(1-\delta) + \delta|\theta|,$$

to używając prostej nierówności

$$\sin(\delta\eta) \ge \delta \sin\eta$$

prawdziwej dla $0 \le \eta \le \frac{\pi}{2}$ i $0 < \delta < 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}|p_z(x,y)| &\le C_2(\delta \Re ez)^{-d/2}\exp(-\frac{1}{4}\rho(x,y)^2(1-\delta)\cos\theta/(r\sin\gamma)) \\ &\le C_2(\delta \Re ez)^{-d/2}\exp(-\frac{1}{4}\rho(x,y)^2(1-\delta)\Re e(z^{-1})),\end{aligned}$$

co dowodzi twierdzenia 5.3.

Dokończenie dowodu twierdzenia 5.2. Ze wzoru (36) wynika, że

$$< H_s(L)\phi, \psi >= \int_0^\infty < C_r(\sqrt{L})\phi, \psi > \frac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{r^2}{4s}} dr$$

dla $\phi, \psi \in L^2(dx)$. Stąd

$$s^{-1/2} < H_{(4s)^{-1}}(L)\phi, \psi >= \int_0^\infty (\pi r)^{-1/2} < K_{C_{\sqrt{r}}}(\sqrt{L})\phi, \psi > e^{-sr} dr.$$

Innymi słowy funkcja $v(s) = s^{-1/2} < H_{(4s)^{-1}}(L)\phi, \psi >$ jest transformatą Fouriera- Laplaca funkcji $w(r) = (\pi r)^{-1/2} < C_{\sqrt{r}}(\sqrt{L})\phi, \psi >$. Jeżeli funkcje ϕ i ψ spełniają założenia twierdzenia, to z twierdzenia 5.3 wynika, że dla $\eta = \rho(x,y) - \xi_1 - \xi_2$ mamy

$$| < H_{(4s)^{-1}}(L)\phi, \psi > | \le C_\delta(\Re e\ s^{-1})^{-d/2}\exp(\frac{4}{4+\delta}\eta^2 \Re e\ s)$$

dla $\Re e\ s^{-1} > 0$. Stąd, na mocy jednej z wersji twierdzenia Paley-Wienera ([15] Theorem 7.4.3 str. 193) wynika, że

$$\text{supp } w(r) \subset [\eta^2(1+\delta/4)^{-1}, \infty). \tag{74}$$

Ponieważ (74) jest spełnione dla wszystkich $\delta > 0$, to jest to prawda również przy $\delta = 0$, co dowodzi twierdzenia 5.2.

Uwaga. Twierdzenie 5.2 można wykorzystać do dowodu twierdzenia 4.1. Przy czym do dowodu wystarczą najsłabsze z rozważanych przez nas oszacowań gaussowskich dla jąder ciepła to znaczy oszacowania (52). Rzeczywiście kładąc w twierdzenia 5.2 $b = \frac{4+\epsilon}{4}$, wobec oszacowań (52) otrzymujemy

$$\text{supp } K_{C_t(\sqrt{L})} \subset \{(x,y) \in M^2 : \rho(x,y) \leq t\frac{4+\epsilon}{4}\}.$$

Podobnie jak (74), ponieważ powyższa inkluzja jest prawdziwa dla wszystkich $\epsilon > 0$, zatem musi być również prawdziwa dla $\epsilon = 0$, co dowodzi twierdzenia 4.1. W ten sposób możemy otrzymać (58) i (59) nie odwołując się do poprzedniego rozdziału.

6 Twierdzenie mnożnikowe dla podlaplasjanu na grupach jednorodnych.

Klasyczne twierdzenie mnożnikowe Hörmandera udowodnione w [14] (patrz również [15] Theorem 7.9.5 str. 243) mówi, że jeżeli funkcja $F \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełnia następujący warunek

$$(75) \qquad \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{R/2<|\xi|<2R} |R^{|\alpha|} D^\alpha F(\xi)| \, d\xi / R^n \leq C < \infty,$$

dla wszystkich $R > 0$ i pewnej liczby naturalnej $s > n/2$, to operator mnożnikowy

$$\widehat{T\phi}(\xi) = F(\xi)\hat{\phi}(\xi)$$

można rozszerzyć do operatora ciągłego na przestrzeniach L^p dla $1 < p < \infty$ i słabego typu (1,1). Wiadomo (patrz [1]), że warunek (75) można zastąpić warunkiem

$$\sup_{t>0} \|\eta(|\cdot|)F(t\,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} < \infty, \quad \text{dla pewnego} \quad s > n/2,$$

gdzie $H^s(\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią Sobolewa rzędu s, a $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ jest pomocniczą funkcją nie będącą tożsamościowo równą zero. Zauważmy, że warunek ten nie zależy od wyboru funkcji η. Dla mnożników radialnych, to znaczy mnożników postaci $F(|\xi|)$, gdzie $F : I\!R_+ \mapsto I\!\!C$, a $|\cdot|$ jest normą euklidesową na $I\!R^n$, powyższy warunek jest równoważny z następującym założeniem

$$(76) \qquad \sup_{t>0} \|\eta(\cdot)F(t\ \cdot)\|_{H^s(I\!R_+)} < \infty.$$

Prosty rachunek dowodzi, że funkcja $F(\lambda)$ spełnia warunek (76) wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $\lambda \mapsto F(\lambda^2)$ spełnia ten warunek. Tak więc twierdzenie Hörmandera daje również warunek wystarczający na to by mnożnik spektralny operatora Laplace'a $F(\Delta)$, który możemy używając transformaty Fouriera zapisać wzorem

$$(77) \qquad \widehat{F(\Delta)\phi}(\xi) = F(|\xi|^2)\hat{\phi}(\xi)$$

był operatorem ciągłym na $L^p(I\!R^n)$ i słabego typu (1.1).

Niech teraz $\{\delta_t\}_{t>0}$ będzie rodziną dylatacji na grupie jednorodnej G (patrz definicja 3.1). Zdefiniujmy działanie dylatacji δ_t na funkcji $\phi \in C_c^\infty(G)$ wzorem

$$\delta_t\phi(g) = \phi(\delta_t g)$$

Dalej dla systemu $X_1, \ldots, X_k$ pól wektorowych spełniających warunek Hörmandera, zdefiniujmy operator $\mathfrak{L}$ wzorem

$$(78) \qquad \mathfrak{L} = -\sum_{i=1}^{n} X_1^2 + \ldots + X_n^2$$

Każda grupa jednorodna jest unimodularna, więc operator $\mathfrak{L}$ pokrywa się z operatorami $\mathfrak{L}_l$ i $\mathfrak{L}_r$ zdefiniowanymi wzorami (38) (39), które dla grup unimodularnych są sobie równe. Załóżmy ponadto, że $\mathfrak{L}$ jest operatorem jednorodnym rzędu dwa, to znaczy

$$\mathfrak{L}\delta_t\phi = t^2\delta_t(\mathfrak{L}\phi).$$

Tak jak w poprzednich rozdziałach, będziemy oznaczać przez L samosprzężony operator będący domknięciem operatora $\mathfrak{L}$ w $L^2(dg)$ z przestrzeni $C_c^\infty(G)$. W [1] M. Christ udowodnił następujące twierdzenie, będące uogólnieniem twierdzenia mnożnikowego Hörmandera.

Twierdzenie 6.1 *Załóżmy, że L jest samosprzężonym domknięciem jednorodnego operatora zdefiniowanego wzorem (78) na grupie jednorodnej G wymiaru jednorodnego Q (definicja 3.1). Ponadto niech funkcja $F : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$ spełnia warunek (76) dla pewnego $s > Q/2$. Wtedy operator $F(L)$ zdefiniowany przy użyciu rozkładu spektralnego operatora L wzorem (21) jest ciągły na przestrzeniach $L^p(G)$ dla $1 < p < \infty$ i słabego typu (1,1).*

Uwagi 1. Wcześniej słabszą wersję powyższego twierdzenia udowodnili Hulanicki i Stein ([8] str. 208-215). Więcej informacji na temat historii twierdzeń mnożnikowych na grupach stratyfikowanych można znaleźć w [1].

2. Zauważmy, że jeżeli operator L jest jednorodny i system wektorów $X_1, \ldots, X_k$ spełnia warunek Hörmandera, to grupa G jest stratyfikowana i jej wymiar jednorodny Q jest liczbą naturalną, a system $X_1, \ldots, X_k$ musi być bazą przestrzeni $\mathfrak{g}_1$ z definicji 3.3 grupy stratyfikowanej.

Hulanicki i Stein, a także Christ w swoich dowodach oparli się na oszacowaniach jądra ciepła generowanego przez operator L. Celem tego rozdziału jest pokazanie alternatywnego, prostego dowodu twierdzenia 6.1 opartego na własności skończonej prędkości propagacji rozwiązania równania fali. Dowód twierdzenia 6.1 poprzedzimy dowodem trzech lematów.

Lemat 6.1 *Niech $\Delta_Q = -\partial_{x_1} - \ldots - \partial_{x_Q}$ będzie laplasjanem na $\mathbb{R}^Q$, a L operatorem na grupie G spełniającym założenia twierdzenia 6.1. Wtedy*

$$\int_{\{g \in G:\ |g| > r\}} |K_{F(\sqrt{L})}(g)|^2\, dg \ \leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^Q:\ |x| > r\}} |K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}(x)|^2\, dx,$$

gdzie $K_{F(\sqrt{L})}(g)$ i $K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}$ są zdefiniowane tak jak w (40), $\rho(\cdot,\cdot)$ jest odległością podriemannowską odpowiadającą operatorowi L i $|g| = \rho(g,e)$ a $|x|$ jest normą euklidesową na $\mathbb{R}^Q$.

Dowód. Jeżeli położymy $F_t(x) = F(tx)$, to z jednorodności operatora L wynika, że $\delta_t^{-1} F(L) \delta_t = F(t^2 L)$ i $\delta_t^{-1} F(\sqrt{L}) \delta_t = F_t(\sqrt{L})$. Stąd i z definicji (40) jądra splotowego $K_{F(\sqrt{L})}$ dostajemy

$$F_t(\sqrt{L})\phi = \delta_t^{-1} F(\sqrt{L}) \delta_t \phi = \delta_t^{-1}(\delta_t \phi * K_{F(\sqrt{L})}) = \phi * (t^{-Q} \delta_{t^{-1}} K_{F(\sqrt{L})}),$$

czyli

$$K_{F_t(\sqrt{L})}(g) = t^{-Q} K_{F(\sqrt{L})}(\delta_{t^{-1}} g). \tag{79}$$

Zauważmy następnie, że ponieważ operator L jest lewostronnie niezmienniczy, więc również mnożniki $F(L)$ są lewoniezmiennicze i dlatego miara Plancherela μ_y zdefiniowana w lemacie 5.1, nie zależy od punktu y, (w dalszym ciągu będziemy opuszczać indeks y) a ze wzoru (79) wynika, że

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |F_t(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) &= t^{-2Q} \int\limits_G |K_{F(\sqrt{L})}(\delta_{t^{-1}} g)|^2 \, dg \\ &= t^{-Q} \int |F(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda), \end{aligned} \tag{80}$$

stąd $d\mu = \lambda^{Q-1} \, d\lambda$. Ponieważ $\mathbb{R}^Q$ jest również grupą jednorodną wymiaru Q, to z (80) wynika, że

$$\int\limits_G |K_{F(\sqrt{L})}|^2 \, dg = \int\limits_{\mathbb{R}^Q} |K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}|^2 \, dx. \tag{81}$$

Jądro $K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}$ możemy łatwo obliczyć, korzystając z transformaty Fouriera

$$K_{F(\sqrt{\Delta_Q})} = \widehat{F(|\cdot|)}. \tag{82}$$

Niech teraz $\chi_{B(r)}$ oznacza funkcję charakterystyczną kuli euklidesowej o promieniu r w $\mathbb{R}^Q$. Ponieważ funkcje $\chi_{B(r)} K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}$ i $(1 - \chi_{B(r)}) K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}$ są radialne, więc istnieją takie funkcje $M^r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ i $M_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, że

$$K_{M_r(\sqrt{\Delta_Q})} = \chi_{B(r)} K_{F(\sqrt{\Delta_Q})} \quad \text{i} \quad K_{M^r(\sqrt{\Delta_Q})} = (1 - \chi_{B(r)}) K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}.$$

Na mocy twierdzenia 4.2 mamy

$$\operatorname{supp} K_{M_r(\sqrt{L})} \subset b(r) = \{g \in G : \ |g| \leq r\}. \tag{83}$$

Oczywiście $F = M_r + M^r$, dlatego

$$K_{F(\sqrt{L})} = K_{M_r(\sqrt{L})} + K_{M^r(\sqrt{L})}$$

i na mocy (83)

$$K_{F(\sqrt{L})}(g) = K_{M^r(\sqrt{L})}(g) \quad \text{dla} \quad |g| > r. \tag{84}$$

Stąd i z (81)

$$\int_{|g|>r} |K_{F(\sqrt{L})}|^2 \, dg = \int_{|g|>r} |K_{M^r(\sqrt{L})}|^2 \, dg \leq \int_G |K_{M^r(\sqrt{L})}|^2 \, dg$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |K_{M^r(\sqrt{\Delta_Q})}|^2 \, dx = \int_{|x|>r} |K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}|^2 \, dx,$$

co dowodzi lematu 6.1.

Na mocy lematu 6.1 dla funkcji $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ i liczby $a > 0$

$$\int_G |g|^a |K_{F(\sqrt{L})}(g)|^2 dg = \int_G \int_0^{|g|} a r^{a-1} |K_{F(\sqrt{L})}(g)|^2 dr dg$$

$$= \int_0^\infty a r^{a-1} \int_{|g|>r} |K_{F(\sqrt{L})}(g)|^2 dg dr \leq \int_0^\infty a r^{a-1} \int_{|x|>r} |K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}(x)|^2 \, dx \, dr$$

$$= \int_{\mathbb{R}^Q} |x|^a |K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}(x)|^2 \, dx.$$

Powyższe rachunki dowodzą

Lemat 6.2 *Dla dowolnego $a > 0$*

$$\int_G |g|^a |K_{F(\sqrt{L})}(g)|^2 \, dg \leq \int_{\mathbb{R}^Q} |x|^a |K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}(x)|^2 \, dx.$$

W następującym lemacie przez X i $\sqrt{L}$ będziemy, przy pewnym nadużyciu notacji, oznaczać nie tylko lewoniezmiennicze pole wektorowe X i operator $\sqrt{L}$ ale również takie dystrybucje na grupie G, że dla funkcji $\phi \in C_c^\infty(G)$ mamy $\phi * X = X\phi$ i $\phi * \sqrt{L} = \sqrt{L}\phi$.

Lemat 6.3 *Jeżeli X_i jest jednym z pól definiujących operator L, to*

$$\int_G |g|^a |X_i * K_{F(\sqrt{L})}|^2 \, dg \leq \int_{\mathbb{R}^{Q+2}} |x|^a |K_{F(\sqrt{\Delta_{Q+2}})}|^2 \, dx.$$

Dowód. Ponieważ operatory $F(\sqrt{L})$ i $\sqrt{L}$ komutują, to

$$\sqrt{L} * K_{F(\sqrt{L})} = \sqrt{L} K_{F(\sqrt{L})} = K_{\tilde{F}(\sqrt{L})},$$

gdzie $\tilde{F}(\lambda) = \lambda F(\lambda)$. Stąd

$$(85) \qquad \int_G |X_i * K_{F(\sqrt{L})}|^2 \, dg = \int_G -X_i^2 * K_{F(\sqrt{L})} \overline{K_{F(\sqrt{L})}} \, dg$$
$$\leq \int_G L * K_{F(\sqrt{L})} \overline{K_{F(\sqrt{L})}} \, dg = \int_G |\sqrt{L} * K_{F(\sqrt{L})}|^2 \, dg$$
$$= \int_G |\sqrt{L} K_{F(\sqrt{L})}|^2 \, dg = \int_G |K_{\tilde{F}(\sqrt{L})}|^2 \, dg$$
$$= \int_0^\infty |\lambda F(\lambda)|^2 \lambda^{Q-1} \, d\lambda = \int_{I\!R^{Q+1}} |K_{F(\sqrt{\Delta^{Q+2}})}|^2$$

Splot $X_i *$ jest operatorem lokalnym to znaczy

$$(86) \qquad \mathrm{supp}\ X_i * \phi \subset \mathrm{supp}\ \phi,$$

dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty$. Zauważmy teraz, że korzystając z warunków (85) i (86) możemy tak zmodyfikować dowódy lematów 6.1 i 6.2 by otrzymać lemat 6.3.

Dowód twierdzenia 6.1. Z warunku (76) wynika, że $\sup |F(\lambda)| < \infty$ i na mocy twierdzenia spektralnego operator $F(\sqrt{L})$ jest ciągłym operatorem na $L^2(dg)$. Stąd z [2] (Théorème (2.4) str. 74) wynika, że do dowdu twierdzenia 6.1 wystarczy pokazać, że jeżeli F spełnia warunek (76), to

$$(87) \qquad \int_{|g|>2|h|} |K_{F(\sqrt{L})}(g) - K_{F(\sqrt{L})}(h^{-1}g)| \, dg \leq C \leq \infty$$

Jeżeli $Y_1, \ldots, Y_l$ jest bazą ortonormalną dla lewoniezmienniczej metryki riemannowskiej $\rho(\cdot,\cdot)$ i γ jest geodezyjną realizującą minimum odległości miedzy punktami e i h^{-1}, to

$$(88) \qquad \int_G |\phi(g) - \phi(h^{-1}g)| \, dg \leq \int_G \int_0^{\rho(e,h)} |\frac{d}{dt}\phi(\gamma(t)g)| \, dtdg$$
$$\leq \int_0^{\rho(h,e)} \sum_i \int_G |a_i(t) Y_i * \phi|(\gamma(t)g) \, dtdg \leq l\rho(e,h) \mathrm{Max}_i \int_G |Y_i * \phi| \, dg,$$

gdzie $\frac{d}{dt}\gamma(t) = \sum_i a_i(t)Y_i$. Ostatnia z nierówności (88) wynika stąd, że dla geodezyjnej $\sum_i |a_i(t)|^2 = 1$. Zauważmy ponadto, że nierówności (88) zachodzą dla wszystkich lewoniezmienniczych metryk riemanowskich na danej grupie i dlatego z lematu 2.4 wynika, że również jeżeli system $X_1, \dots, X_k$ spełnia warunek Höramandera, to

$$\int_G |\phi(h^{-1}g) - \phi(g)|\, dg \leq l|h|\mathrm{Max}_i \int_G |X_i * \phi|\, dg, \tag{89}$$

gdzie $|h|$ jest odległościa miedzy h i e w odpowiadającej układowi $X_1, \dots, X_k$ metryce podriemanowskiej.

Jeżeli $0 < a < b < \infty$ i supp $F \in (a, b)$, to

$$c_Q \|F(\cdot)\|_{H^s(I\!R_+)} \geq \|F(|\cdot|)\|_{H^s(R^Q)}, \tag{90}$$

przy czym wartość stałej c_Q zależy tylko od a,b i Q. (Dokładniej obie te normy są tu równoważne.) Z drugiej strony z definicji przestrzeni Sobolewa

$$\int_{I\!R^Q} (1 + |x|^2)^s |K_{F(\sqrt{\Delta_Q})}|^2\, dx = \|F(|\cdot|)\|^2_{H^s(I\!R_Q)}, \tag{91}$$

$$\int_{I\!R^Q} (1 + |x|^2)^s |K_{F(\sqrt{\Delta_{Q+2}})}|^2\, dx = \|F(|\cdot|)\|^2_{H^s(I\!R_{Q+2})} \tag{92}$$

Z (90), (91) i (92) na mocy lematu 6.2 i 6.3 otrzymujemy, że jeżeli supp $F \subset (a, b)$, to

$$(\int_G |K_{F(\sqrt{L})}|^2 (1 + |g|^2)^s\, dg)^{\frac{1}{2}} \leq c_Q \|F\|_{H^s(I\!R_+)}, \tag{93}$$

$$(\int |X_i * K_{F(\sqrt{L})}(g)|^2 (1 + |g|^2)^s\, dg)^{\frac{1}{2}} \leq c_{Q+2} \|F\|_{H^s(I\!R_+)}. \tag{94}$$

Z (93) na mocy nierówńsci Schwartza mamy

$$\int_{|g|>t} |K_{F(\sqrt{L})}(g)|\, dg \leq t^{Q/2-s} C_1 \|F\|_{H^s(I\!R_+)}, \tag{95}$$

Ponownie korzystając z nierówności Schwartza, z (94) i oszacowań (89) otrzymujemy

$$\int |K_{F(\sqrt{L})}(g) - K_{F(\sqrt{L})}(h^{-1}g)|\, dg \leq C_2 |h| \|F\|_{H^s(I\!R_+)}, \tag{96}$$

Niech teraz $\eta \in C_c^\infty(I\!\!R_+)$ będzie taką funkcją, że supp $\eta \subset (a,b)$ dla pewnych $a, b \in I\!\!R_+$ i

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \eta(2^i\lambda) = 1,$$

a F będzie funkcją spełniającą warunek (76). Połóżmy $F_i(\lambda) = F(\lambda)\eta(2^i\lambda)$ i $\tilde{F}_i(\lambda) = F_i(2^{-i}\lambda)$. Oczywiście supp $\tilde{F}_i \subset (a,b)$. Niech następnie

$$C = \max\{C_1, C_2\} \sup_{t>0} \|\eta(|\cdot|)F(t\ \cdot)\|_{H^s(I\!\!R^n)}.$$

Na mocy (95) i (96) mamy

$$\int\limits_{|g|>|h|} |K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}(g)|\, dg \le C(|h|)^{Q/2-s}$$

oraz

$$\int_G |K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}(g) - K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}(h^{-1}g)|\, dg \le C|h|,$$

Stąd na mocy wzoru (79) mamy

$$\begin{aligned} \int\limits_{|g|>|h|} |K_{F_i(\sqrt{L})}(g)|\, dg &= 2^{-iQ} \int\limits_{|g|>|h|} |K_{F(\sqrt{L})}(\delta_{2^{-i}}g)|\, dg \\ &= \int\limits_{|g|>2^{-i}|h|} |K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}(g)|\, dg \le C(2^{-i}|h|)^{Q/2-s} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} &\int_G |K_{F_i(\sqrt{L})}(g) - K_{F_i(\sqrt{L})}(h^{-1}g)|\, dg \\ &= 2^{-iQ} \int_G |K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}(\delta_{2^{-i}}g) - K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}(\delta_{2^{-i}}(h^{-1}g))|\, dg \\ &= \int_G |K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}(g) - K_{\tilde{F}_i(\sqrt{L})}((\delta_{2^{-i}}h^{-1})g)|\, dg \le C2^{-i}|h|, \end{aligned}$$

Stąd, ponieważ $F = \sum_{-\infty}^{\infty} F_i$, mamy

$$\begin{aligned} &\int\limits_{|g|>2|h|} |K_{F(\sqrt{L})}(g) - K_{F(\sqrt{L})}(h^{-1}g)|\, dg \\ &\le \sum_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{|g|>2|h|} |K_{F_i(\sqrt{L})}(g) - K_{F_i(\sqrt{L})}(h^{-1}g)|\, dg \end{aligned}$$

$$\leq 2 \sum_{-\infty < i \leq m} \int_{|g|>|h|} |K_{F_i(\sqrt{L})}(g)| \, dg$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{\infty} \int_{G} |K_{F_i(\sqrt{L})}(g) - K_{F_i(\sqrt{L})}(h^{-1}g)| \, dg$$

$$\leq C \left(2 \sum_{-\infty < i \leq m} (2^{-i}|h|)^{Q/2-s} + \sum_{i=m+1}^{\infty} (2^{-i}|h|) \right).$$

Wybierając m tak, by $1 \leq 2^{-m}|h| \leq 2$ widzimy, że powyższa suma jest ograniczona niezależnie od wyboru $|h|$, co dowodzi (87) i twierdzenia 6.1.

Uwaga. W [21] D. Müller i E. M. Stein udowodnili, że dla pewnej klasy grup można w twierdzeniu 6.1 zastąpić wymiar jednorodny wymiarem euklidesowym grupy. W [21] udowodnino również, że jest to wtedy wynik optymalny. Dla trochę szerszej klasy grup, zawartej jednak w klasie grup nilpotentnych drugiego stopnia nilpotentności, twierdzenie mnożnikowe z wymiarem euklidesowym grupy udowodnił W. Hebisch w [12], a w [13] W. Hebisch i J. Zienkiewich udowodnili , że dla tej samej klasy grup twierdzenie to jest prawdziwe również dla innych operatorów jednorodnych . W ogólnym przypadku jednak nie wiadomo jakie są optymalne założenia dla twierdzenia mnożnikowego. Inny ciekawy dowód twierdzenia 6.1 jest zawarty w pracy [18].

References

[1] M. Christ, *L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups,* Trans. Amer. Math. Soc. **328,** 1991, str. 73-81.

[2] R. R. Coifman i G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur cerains Espaces homogenes,* Springer 1971.

[3] Th. Coulhon, *Iteration de Moser et estimation Gaussienne du noyau de la chaleur,* to appear in J. Oper. Th.

[4] E. B. Davies *Heat kernels and spectral theory,* Cambridge Univ. Press 1989.

[5] E. B. Davies *Explicit constants for gaussian upper bounds on heat kernels,* Amer. J. Math. **109,** 1987, str. 319-334.

[6] E. B. Davies i M. M. H. Pang *Sharp heat kernel bounds for some Laplace operators,* Quart. J. Math. Oxford (2), **40,**1989, str. 281-290.

[7] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Math. Notes, Princeton Univ. Press 1976.

[8] G. B. Folland, E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous group,* Math. Notes, Princeton Univ. Press, 1982.

[9] J. Gale, T. Pytlik, *Symbolic calculus for infinitesimal generators of holomorphic semigroup,* preprint.

[10] J. Gancarzewicz, *Geometria różniczkowa,* Warszawa 1987.

[11] W. Hebisch, A. Sikora, *A smooth subadditive homogeneous norm on a homogeneous group,* Studia Mathematica, **T. XCVI,** 1990, str. 231-236.

[12] W. Hebisch, *Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups,* preprint.

[13] W. Hebisch, J. Zienkiewicz, *Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups II,* preprint.

[14] L. Hörmander, *Esimates for translation invariant operators in L^p spaces,* Acta Math. **104,** 1960, str. 93-139.

[15] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators 1*, Springer 1983.

[16] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations.* Acta Math. **119,** 1967, str. 147-171.

[17] A. Hulanicki and J. W. *Jenkins, Almost everywhere summability on nilmanifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. **278,** 1983, str. 703-715.

[18] G. Mauceri, S. Meda, *Vector-Valued multipliers on stratified groups,* Rev. Mat. Iberoamericana, **6**, 1990, str. 141-154.

[19] R. Melrose, *Propagation for the wave group of a positive subelliptic second order differential operator,* Tanigushi Symp. HERT Katata 1984, str. 181-192.

[20] S. A. Molchnov, *Diffusion processes and Riemannian geometry,* Russian Math. Surveys **30:1,**1975, str. 1-63

[21] D. Müller, E. M. Stein, *On spectral multipliers for a class of nilpotent groups*, preprint.

[22] A. Sikora *Multiplicareurs associés aux souslaplaciens sur les groupes homogènes,* C. R. Acad. Sci. Paris, **t. 315**, Série I, 1992 str. 417-419.

[23] A. Sikora *Sharp pointwise estimates on heat kernels,* preprint.

[24] R. S. Strichartz, *Sub-Riemannian Geometry,* J. Differential Geometry **24,** 1986, str. 221-263.

[25] M. Taylor, *Pseudodifferential operators,* Princeton Univ. Press 1981.

[26] N. Th. Varopoulos, *Analis on Lie Group,* J. Funct. Anal. **76,** 1988, str. 346-410.

[27] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, *Analysis and geometry on Groups* Cambridge Univ. Press 1992.