ANALYSE HARMONIQUE/HARMONIC ANALYSIS

Multiplicateurs associés aux souslaplaciens sur les groupes homogènes

Adam Sikora[1]

Résumé - *Nous présentons une démonstration simple du théorème de multiplicateurs de M. Christ en utilisant les propriétés de l'équation des ondes.*

Multiplier theorem for sublaplacians on homogeneous groups

Abstract - *We obtain a simple proof of M. Christ's multiplier theorem using properties of the wave equation related to the finite speed of propagation.*

0. INTRODUCTION. Dans [1] M. Christ a montré, que si G est un groupe homogène, Q est la dimension homogène de G et si $L = X_1^2 + ... + X_k^2$ est un souslaplacien homogène associé à un système des vecteurs invariants à gauche satisfaisant à la condition de Hörmander, on a le théorème suivant:

Théorème 1. *On suppose que la fonction $m : \mathbb{R} \to C$ satisfait à la condition suivante:*

$$\sup_{t>0} \|\eta(\cdot)m(t\ \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}_+)} < \infty, \qquad \text{pour un} \quad s > Q/2, \tag{1}$$

où $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ est une fonction auxiliaire fixée, non identiquement nulle, et $\|\cdot\|_{H^s}$ est la norme de Sobolev d'ordre s. Alors l'opérateur $m(L)$, défini par la résolution spectrale de L est continu dans $L^p(G)$, et $m(L)$ est du type faible (1,1).

On va donner une démonstration simple du Théorème 1. Dans son travail [1] M. Christ a utilisé certaines majorations du noyau de la chaleur. Note preuve est basée sur la propriété de vitesse finie de propagation pour l'équation des ondes. Cette idée est plus proche de la démonstration originale du théorème de Hörmander sur $G = \mathbb{R}^n$.

1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Par un calcul facile on obtient que $m(\cdot)$ satisfait (1) si et seulement si $m(\cdot\ ^2)$ le satisfait. Alors on peut remplacer l'opérateur $m(L)$ dans le Théorème 1 par l'opérateur $m(\sqrt{L})$. On notera $\tilde{m}(L)$ (resp. $\tilde{m}(\sqrt{L})$) le noyau de convolution de l'opérateur $m(L)$ (resp. $m(\sqrt{L})$), i.e. la distribution telle que

$$m(L)f = f * \tilde{m}(L) \quad (\text{resp. } m(\sqrt{L})f = f * \tilde{m}(\sqrt{L})).$$

[1]Note présentée par

On notera $|g|$ la distance de $g \in G$ à $e \in G$ dans la métrique de Carathéodory définie par $X_1, ..., X_k$, où e est l'identité de G et on notera $|x|$ la distance euclidienne de $x \in I\!R^Q$ à l'origine.

On donnera d'abord la démonstration du lemme suivant

Lemme 1.*Soit Δ le laplacien usuel sur $I\!R^Q$. Pour $r \geq 0$* on a

$$\int_{\{g \in G;\ |g|>r\}} |m(\sqrt{L})|^2\ dg\ \leq \int_{\{x \in I\!R^Q;\ |x|>r\}} |m(\sqrt{\Delta})|^2\ dx.$$

Démonstration. On peut facilement montrer (voir [1],[4]) que

$$\int_G |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2\ dg = \int |m(\lambda)|^2 \lambda\ d\lambda. \tag{2}$$

D'après (2) on a

$$\int_G |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2\ dg = \int_{I\!R^Q} |\tilde{m}(\sqrt{\Delta})|^2\ dx. \tag{3}$$

Maintenant, si $\chi_{B(r)}$ est la fonction indicatrice de la boule $B(r) = \{x \in I\!R^Q;\ |x| \leq r\}$, les fonctions $\chi_{B(r)}\tilde{m}(\sqrt{\Delta})$ et $(1-\chi_{B(r)})\tilde{m}(\sqrt{\Delta})$ sont radiales et alors il existe deux fonctions $m^r : I\!R_+ \to C$ et $m_r : I\!R_+ \to C$ telles que

$$\tilde{m}_r(\sqrt{\Delta}) = \chi_{B(r)}\tilde{m}(\sqrt{\Delta}) \quad \text{et} \quad \tilde{m}^r(\sqrt{\Delta}) = (1-\chi_{B(r)})\tilde{m}(\sqrt{\Delta}).$$

Soit $M : I\!R \to C$ une fonction paire coïncidant avec m_r sur $I\!R_+$. On a supp $\tilde{m}_r(\sqrt{\Delta}) \subset B(r)$, par conséquent supp $\hat{M} \subset [-r, r]$, plus précisement on a $\hat{M}(a) = \int \tilde{m}_r(\sqrt{\Delta})(a, x_2, ..., x_Q)\ dx_2...dx_Q$. Mais par [5],[6] supp $\widetilde{\cos}\ t\sqrt{L} \subset b(r) = \{g \in G;\ |g| \leq r\}$ et en utilisant le calcul fonctionnel

$$m(\sqrt{L}) = \int_{I\!R} \hat{M}(t) \cos t\sqrt{L}\ \ dt$$

on obtient que

$$\text{supp } \tilde{m}_r(\sqrt{L}) \subset b(r). \tag{4}$$

Evidemment $m = m_r + m^r$, donc $\tilde{m}(\sqrt{L}) = \tilde{m}_r(\sqrt{L}) + \tilde{m}^r(\sqrt{L})$ et

$$\tilde{m}(\sqrt{L})(g) = \tilde{m}^r(\sqrt{L})(g) \quad \text{si} \quad |g| > r \tag{5}$$

par (4). L'inégalité

$$\int\limits_{|g|>r} |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 \, dg = \int\limits_{|g|>r} |\tilde{m}^r(\sqrt{L})|^2 \, dg \leq \int\limits_G |\tilde{m}^r(\sqrt{L})|^2 \, dg$$
$$= \int\limits_{I\!R} |\tilde{m}^r(\sqrt{\Delta})|^2 \, dx = \int\limits_{|x|>r} |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 \, dx$$

est une conséquence de (3) et (5). Le Lemme 1 est ainsi démontré.

D'après le Lemme 1, pour tout $m : I\!R_+ \to C$ et pour tout $a > 0$

$$\int\limits_G |g|^a |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 dg = \int\limits_G \int\limits_0^{|g|} a r^{a-1} |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 dr dg = \int\limits_0^\infty a r^{a-1} \int\limits_{|g|>r} |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 dg dr$$
$$\leq \int\limits_0^\infty a r^{a-1} \int\limits_{|x|>r} |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 \, dx \, dr = \int\limits_{I\!R^Q} |x|^a |\tilde{m}(\sqrt{\Delta})|^2 \, dx,$$

ce qui démontre la lemme suivant.

Lemme 2. *Pour tout $a > 0$*

$$\int\limits_G |g|^a |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 \, dg = \int\limits_{I\!R^Q} |x|^a |\tilde{m}(\sqrt{\Delta})|^2 \, dx.$$

Pour terminer la démonstration du Théorème 1 on remarque que si le support de m est compact et si $\|m\|_{H^s} < \infty$, on a

$$\int\limits_{I\!R^Q} (1 + |x|^2)^s |\tilde{m}(\sqrt{\Delta})|^2 \, dx \leq C \|m\|^2_{H^s(I\!R_+)}$$

et par le Lemme 2

$$\int\limits_G (1 + |g|^2)^s |\tilde{m}(\sqrt{L})|^2 dg \leq C \|m\|^2_{H^s(I\!R_+)}. \tag{6}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz pour $0 < 2a < s - Q/2$ on a

$$\int\limits_G |\tilde{m}(\sqrt{L})| (1 + |g|^2)^a \, dg < C \|m\|_{H^s(I\!R_+)}.$$

L'inégalité $\|\lambda m(\lambda)\|_{H^s(\mathbb{R}_+)} < \infty$ résulte de $\|m(\lambda)\|_{H^s(\mathbb{R}_+)} < \infty$ et de la compacité de supp m. Alors (6) est satisfait pour $L\tilde{m}(\sqrt{L})$, d'où

$$\int |\tilde{m}(\sqrt{L})(g) - \tilde{m}(\sqrt{L})(h^{-1}g)| \, dg \leq C|h|.$$

Le reste de la démonstration utilise une technique classique de Calderón-Zygmund (voir [3], Theorem 7.9.5). Une autre conséquences du Lemme 2 sera publiée dans [2].

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. Christ, L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 328, 1991, p. 73-81.

[2] J. Gale, T. Pytlik, Symbolic calculus for infinitesimal generators of holomorphic semigroup, preprint.

[3] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol.1, Springer-Verlag, Berlin 1983.

[4] A. Hulanicki and J. W. Jenkins, Almost everywhere summability on nilmanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* 278, 1983, p. 703-715.

[5] R. Melrose, Propagation for the wave group of a positive subelliptic second order differential operator, *Hyperbolic Equations and Related Topics*, Academic Press, Boston, Mass., 1986.

[6] A. Sikora, Wave equation on Lie groups, preprint.

Institut de Mathématiques, Université de Wrocław, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław, Pologne